

# Prädikatenlogik: Syntaktik

Michael Matzer

16.01.2024

# Inhalt

- 1 Zeichenvorrat
- 2 Formelvorrat
- 3 Freie und gebundene Vorkommnisse von Variablen in Formeln
- 4 Satzvorrat
- 5 Literatur

# Alphabet / Lexikon: Neue Zeichen

## 1 Außerlogische Konstanten

1 Individuenkonstanten:  $a, b, c, \dots$

2  $n$ -stellige Prädikate für  $n \in \mathbb{N}^+$ :  $P^n, P_1^n, P_2^n, \dots$

## 2 Logische Konstanten

1 2 Quantoren:

$\forall$  Allquantor

$\exists$  Existenzquantor

## 3 Variablen

• (Individuen-) Variablen:  $x, y, z, x_1, y_1, \dots$

# Alphabet / Lexikon: Neue Zeichen

## 1 Außerlogische Konstanten

1 Individuenkonstanten:  $a, b, c, \dots$

2  $n$ -stellige Prädikate für  $n \in \mathbb{N}^+$ :  $P^n, P_1^n, P_2^n, \dots$

## 2 Logische Konstanten

1 2 Quantoren:

$\forall$  Allquantor

$\exists$  Existenzquantor

## 3 Variablen

- (Individuen-) Variablen:  $x, y, z, x_1, y_1, \dots$

# Alphabet / Lexikon: Neue Zeichen

## ① Außerlogische Konstanten

① Individuenkonstanten:  $a, b, c, \dots$

②  $n$ -stellige Prädikate für  $n \in \mathbb{N}^+$ :  $P^n, P_1^n, P_2^n, \dots$

## ② Logische Konstanten

① 2 Quantoren:

$\forall$  Allquantor

$\exists$  Existenzquantor

## ③ Variablen

- (Individuen-) Variablen:  $x, y, z, x_1, y_1, \dots$

# Alphabet / Lexikon: Neue Zeichen

## ① Außerlogische Konstanten

① Individuenkonstanten:  $a, b, c, \dots$

②  $n$ -stellige Prädikate für  $n \in \mathbb{N}^+$ :  $P^n, P_1^n, P_2^n, \dots$

## ② Logische Konstanten

① 2 Quantoren:

$\forall$  Allquantor

$\exists$  Existenzquantor

## ③ Variablen

- (Individuen-) Variablen:  $x, y, z, x_1, y_1, \dots$

## Konvention

- Statt  $,P^1'$ ,  $,P_1^1'$ ,  $,P_2^1'$ , ... für einstellige Prädikate schreiben wir auch andere Großbuchstaben (die manchmal an den natürlichsprachlichen Allgemeinterm erinnern, den sie vertreten).
- Statt  $,P^n'$ ,  $,P_1^n'$ ,  $,P_2^n'$ , ... für mehrstellige Prädikate ( $n \geq 2$ ) schreiben wir auch  $,R'$ , ....

# Formelvorrat

## Definition (Term)

Ein *Term* ist eine Individuenkonstante oder eine (Individuen-) Variable.

## Definition (Formel)

- 1 Jedes  $n$ -stellige Prädikat gefolgt von  $n$ -vielen geklammerten, durch Kommata separierten Termen (für  $n \in \mathbb{N}^+$ ) ist eine Formel. (Prädikation)
- 2 Sei  $A$  eine Formel. Dann ist auch eine Formel:
  - $\neg A$  (Negationsformel)
- 3 Seien  $A$  und  $B$  Formeln. Dann sind auch Formeln:
  - 1  $(A \wedge B)$  (Konjunktionsformel)
  - 2  $(A \vee B)$  (Disjunktionsformel)
  - 3  $(A \rightarrow B)$  (Implikationsformel)
  - 4  $(A \leftrightarrow B)$  (Äquivalenzformel)
- 4 Sei  $v$  eine Variable und  $A$  eine Formel. Dann sind auch Formeln (Quantifikationen):
  - 1  $\forall vA$  (Allformel)
  - 2  $\exists vA$  (Existenzformel)
- 5 Sonst ist nichts eine Formel.

## Definition (Formel)

- 1 Jedes  $n$ -stellige Prädikat gefolgt von  $n$ -vielen geklammerten, durch Kommata separierten Termen (für  $n \in \mathbb{N}^+$ ) ist eine Formel. (Prädikation)
- 2 Sei  $A$  eine Formel. Dann ist auch eine Formel:
  - $\neg A$  (Negationsformel)
- 3 Seien  $A$  und  $B$  Formeln. Dann sind auch Formeln:
  - 1  $(A \wedge B)$  (Konjunktionsformel)
  - 2  $(A \vee B)$  (Disjunktionsformel)
  - 3  $(A \rightarrow B)$  (Implikationsformel)
  - 4  $(A \leftrightarrow B)$  (Äquivalenzformel)
- 4 Sei  $v$  eine Variable und  $A$  eine Formel. Dann sind auch Formeln (Quantifikationen):
  - 1  $\forall vA$  (Allformel)
  - 2  $\exists vA$  (Existenzformel)
- 5 Sonst ist nichts eine Formel.

## Definition (Formel)

- ① Jedes  $n$ -stellige Prädikat gefolgt von  $n$ -vielen geklammerten, durch Kommata separierten Termen (für  $n \in \mathbb{N}^+$ ) ist eine Formel. (Prädikation)
- ② Sei  $A$  eine Formel. Dann ist auch eine Formel:
  - $\neg A$  (Negationsformel)
- ③ Seien  $A$  und  $B$  Formeln. Dann sind auch Formeln:
  - ①  $(A \wedge B)$  (Konjunktionsformel)
  - ②  $(A \vee B)$  (Disjunktionsformel)
  - ③  $(A \rightarrow B)$  (Implikationsformel)
  - ④  $(A \leftrightarrow B)$  (Äquivalenzformel)
- ④ Sei  $v$  eine Variable und  $A$  eine Formel. Dann sind auch Formeln (Quantifikationen):
  - ①  $\forall vA$  (Allformel)
  - ②  $\exists vA$  (Existenzformel)
- ⑤ Sonst ist nichts eine Formel.

## Definition (Formel)

- 1 Jedes  $n$ -stellige Prädikat gefolgt von  $n$ -vielen geklammerten, durch Kommata separierten Termen (für  $n \in \mathbb{N}^+$ ) ist eine Formel. (Prädikation)
- 2 Sei  $A$  eine Formel. Dann ist auch eine Formel:
  - $\neg A$  (Negationsformel)
- 3 Seien  $A$  und  $B$  Formeln. Dann sind auch Formeln:
  - 1  $(A \wedge B)$  (Konjunktionsformel)
  - 2  $(A \vee B)$  (Disjunktionsformel)
  - 3  $(A \rightarrow B)$  (Implikationsformel)
  - 4  $(A \leftrightarrow B)$  (Äquivalenzformel)
- 4 Sei  $v$  eine Variable und  $A$  eine Formel. Dann sind auch Formeln (Quantifikationen):
  - 1  $\forall vA$  (Allformel)
  - 2  $\exists vA$  (Existenzformel)
- 5 Sonst ist nichts eine Formel.

# Freie und gebundene Vorkommnisse von Variablen in Formeln

## Definition (Quantorausdruck)

Ein *Quantorausdruck* ist eine Zeichenreihe der Länge 2, deren erstes Zeichen ein Quantor, und deren zweites Zeichen eine Variable ist.

## Definition (Gleichnamigkeit eines Quantorausdrucks mit einer Variablen)

Sei  $v$  eine Variable. Dann sind die Quantorausdrücke  $\forall v$  und  $\exists v$  *gleichnamig mit  $v$* , und mit keiner anderen Variablen.

## Definition (Bereich eines Quantorausdrucks)

Der *Bereich eines Quantorausdrucks* ist die kürzeste auf ihn folgende Formel.

# Freie und gebundene Vorkommnisse von Variablen in Formeln

## Definition (Quantorausdruck)

Ein *Quantorausdruck* ist eine Zeichenreihe der Länge 2, deren erstes Zeichen ein Quantor, und deren zweites Zeichen eine Variable ist.

## Definition (Gleichnamigkeit eines Quantorausdrucks mit einer Variablen)

Sei  $v$  eine Variable. Dann sind die Quantorausdrücke  $\forall v$  und  $\exists v$  *gleichnamig mit  $v$* , und mit keiner anderen Variablen.

## Definition (Bereich eines Quantorausdrucks)

Der *Bereich eines Quantorausdrucks* ist die kürzeste auf ihn folgende Formel.

# Freie und gebundene Vorkommnisse von Variablen in Formeln

## Definition (Quantorausdruck)

Ein *Quantorausdruck* ist eine Zeichenreihe der Länge 2, deren erstes Zeichen ein Quantor, und deren zweites Zeichen eine Variable ist.

## Definition (Gleichnamigkeit eines Quantorausdrucks mit einer Variablen)

Sei  $v$  eine Variable. Dann sind die Quantorausdrücke  $\forall v$  und  $\exists v$  *gleichnamig mit  $v$* , und mit keiner anderen Variablen.

## Definition (Bereich eines Quantorausdrucks)

Der *Bereich eines Quantorausdrucks* ist die kürzeste auf ihn folgende Formel.

## Definition (Gebundenes Vorkommen einer Variablen in einer Formel)

Sei  $A$  eine Formel und  $v$  eine Variable. Dann gilt für alle Stellen  $S$  in  $A$ :  $v$  *kommt in  $A$  an  $S$  gebunden vor* gdw.

- 1  $v$  kommt in  $A$  an  $S$  vor, und
- 2  $S$  liegt in  $A$  im Bereich eines mit  $v$  gleichnamigen Quantorausdrucks.

## Konvention

In jedem Quantorausdruck ist das Vorkommen der Variablen stets *gebunden*.

## Definition (Freies Vorkommen einer Variablen in einer Formel)

Sei  $A$  eine Formel und  $v$  eine Variable. Dann gilt für alle Stellen  $S$  in  $A$ :  $v$  *kommt in  $A$  an  $S$  frei vor* gdw.

- 1  $v$  kommt in  $A$  an  $S$  vor, und
- 2  $v$  kommt in  $A$  an  $S$  nicht gebunden vor.

## Korollar

Sei  $A$  eine Formel und  $v$  eine Variable. Dann gilt für alle Stellen  $S$  in  $A$ :  $v$  *kommt in  $A$  an  $S$  frei vor* gdw.

- 1  $v$  kommt in  $A$  an  $S$  vor, und
- 2  $S$  liegt in  $A$  nicht im Bereich eines mit  $v$  gleichnamigen Quantorausdrucks.

## Definition (Freies Vorkommen einer Variablen in einer Formel)

Sei  $A$  eine Formel und  $v$  eine Variable. Dann gilt für alle Stellen  $S$  in  $A$ :  $v$  *kommt in  $A$  an  $S$  frei vor* gdw.

- 1  $v$  kommt in  $A$  an  $S$  vor, und
- 2  $v$  kommt in  $A$  an  $S$  nicht gebunden vor.

## Korollar

Sei  $A$  eine Formel und  $v$  eine Variable. Dann gilt für alle Stellen  $S$  in  $A$ :  $v$  *kommt in  $A$  an  $S$  frei vor* gdw.

- 1  $v$  kommt in  $A$  an  $S$  vor, und
- 2  $S$  liegt in  $A$  nicht im Bereich eines mit  $v$  gleichnamigen Quantorausdrucks.

# Satzvorrat

## Definition (Offene Formel)

Für alle Formeln  $A$  gilt:  $A$  ist eine *offene Formel* gdw. in  $A$  mindestens eine Variable an mindestens einer Stelle frei vorkommt.

## Definition (Geschlossene Formel, Satz)

Für alle Formeln  $A$  gilt:  $A$  ist eine *geschlossene Formel* / ein *Satz* gdw. in  $A$  keine Variable frei vorkommt.

## Korollar

Für alle Formeln  $A$  gilt:  $A$  ist eine *geschlossene Formel* / ein *Satz* gdw. in  $A$  entweder überhaupt keine Variable vorkommt, oder wenn in  $A$  jedes Vorkommen jeder Variablen an jeder Stelle gebunden ist.

## Anmerkung

Jeder Satz ist eine Formel, aber nicht jede Formel ist ein Satz.

## Begründung

Sätze sind stets Formeln (nämlich geschlossene Formeln), aber unter den Formeln gibt es sowohl offene (die keine Sätze sind) als auch geschlossene (die Sätze sind).

# Literatur

Leitgeb, Hannes: *Logik I. Eine Einführung in die klassische Aussagen- und Prädikatenlogik*, online verfügbar unter „[https://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/people/faculty/hannes\\_leitgeb/logik\\_1\\_wise20182019/logikskript.pdf](https://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/people/faculty/hannes_leitgeb/logik_1_wise20182019/logikskript.pdf)“, Zugriff am 30.10.2018.

Kamitz, Reinhard: *Logik — Faszination der Klarheit. Eine Einführung für Philosophinnen und Philosophen mit zahlreichen Anwendungsbeispielen*, 2 Bde., Wien u.a.: LIT Verlag 2007 (Einführungen Philosophie 11f.).