

Elementare Logik I
VO WS 2017/18

Paradoxien der materialen Implikation

Michael Matzer

Zunächst einmal ...

Machen wir zunächst den Pfeil möglichst stark, d.h. untermauern wir die Position der klassischen Logik bezüglich (indikativischer) Konditionalsätze.

(Es folgen zwei Argumente, die in dieser Vorlesung noch nicht vorgekommen sind.)

Keine Schönwetterwolken

Wetterprognose

„Wenn es bewölkt ist, dann regnet es.“

Wann ist diese Wetterprognose falsch?

- ⇒ Ganz bestimmt, wenn es bewölkt ist, aber nicht regnet.
- ⇒ Sie ist *nicht* falsch, also *wahr*, wenn es nicht bewölkt ist.

⇒ Rechtfertigung dafür, dass Konditionale mit falschem Antecedens *wahr* sind.

Keine Schönwetterwolken

Wetterprognose

„Wenn es bewölkt ist, dann regnet es.“

Wann ist diese Wetterprognose falsch?

- ⇒ Ganz bestimmt, wenn es bewölkt ist, aber nicht regnet.
- ⇒ Sie ist *nicht* falsch, also *wahr*, wenn es nicht bewölkt ist.

- ⇒ Rechtfertigung dafür, dass Konditionale mit falschem Antecedens *wahr* sind.

Keine Schönwetterwolken

Wetterprognose

„Wenn es bewölkt ist, dann regnet es.“

Wann ist diese Wetterprognose falsch?

- ⇒ Ganz bestimmt, wenn es bewölkt ist, aber nicht regnet.
- ⇒ Sie ist *nicht* falsch, also *wahr*, wenn es nicht bewölkt ist.

⇒ Rechtfertigung dafür, dass Konditionale mit falschem Antecedens *wahr* sind.

Keine Schönwetterwolken

Wetterprognose

„Wenn es bewölkt ist, dann regnet es.“

Wann ist diese Wetterprognose falsch?

- ⇒ Ganz bestimmt, wenn es bewölkt ist, aber nicht regnet.
- ⇒ Sie ist *nicht* falsch, also *wahr*, wenn es nicht bewölkt ist.

⇒ Rechtfertigung dafür, dass Konditionale mit falschem Antecedens *wahr* sind.

Was studiert sie?

Ich frage einen Kollegen

„Was studiert denn die Kollegin, die da gerade vorbeigegangen ist?“

Er antwortet: „Sie studiert entweder Philosophie oder Mathematik (oder beides).“

Das ist synonym mit: „Wenn sie nicht Philosophie studiert, dann studiert sie Mathematik.“

Äquivalent auf Seiten der formalen Sprache sind die Formeln
, $(p \vee q)$ ' und ', $(\neg p \rightarrow q)$ '.

⇒ Rechtfertigung für die Wahrheitsbedingungen des Konditionals
via Disjunktion und Negation, vgl. die letztens besprochenen
Schlüsse ',(DISIMP)'' und ',(IMPDIS)''.

Was studiert sie?

Ich frage einen Kollegen

„Was studiert denn die Kollegin, die da gerade vorbeigegangen ist?“

Er antwortet: „Sie studiert entweder Philosophie oder Mathematik (oder beides).“

Das ist synonym mit: „Wenn sie nicht Philosophie studiert, dann studiert sie Mathematik.“

Äquivalent auf Seiten der formalen Sprache sind die Formeln
, $(p \vee q)$ ' und ', $(\neg p \rightarrow q)$ '.

⇒ Rechtfertigung für die Wahrheitsbedingungen des Konditionals
via Disjunktion und Negation, vgl. die letztens besprochenen
Schlüsse ',(DISIMP)'' und ',(IMPDIS)'.

Was studiert sie?

Ich frage einen Kollegen

„Was studiert denn die Kollegin, die da gerade vorbeigegangen ist?“

Er antwortet: „Sie studiert entweder Philosophie oder Mathematik (oder beides).“

Das ist synonym mit: „Wenn sie nicht Philosophie studiert, dann studiert sie Mathematik.“

Äquivalent auf Seiten der formalen Sprache sind die Formeln
, $(p \vee q)$ ' und ', $(\neg p \rightarrow q)$ '.

⇒ Rechtfertigung für die Wahrheitsbedingungen des Konditionals
via Disjunktion und Negation, vgl. die letztens besprochenen
Schlüsse ',(DISIMP)'' und ',(IMPDIS)''.

So weit, so gut. Aber ...

Nun gibt es aber natürlichsprachliche Argumente, die:

- Konditionalsätze enthalten, die
- Instanzen gültiger Argumentformen sind, die aber
- ungültig zu sein scheinen:

die sogenannten „Paradoxien der materialen Implikation“.

(Es folgt eine kleine Auswahl.)

Zucker und Dieselöl

Gültig (Antecedensverstärkung)

$$(p \rightarrow r) \models ((p \wedge q) \rightarrow r)$$

Aber ...

1. Wenn du Zucker in den Tee gibst, dann wird der Tee gut schmecken.

Wenn du Zucker und Dieselöl in den Tee gibst, dann wird der Tee gut schmecken.

Zucker und Dieselöl

Gültig (Antecedensverstärkung)

$$(p \rightarrow r) \models ((p \wedge q) \rightarrow r)$$

Aber ...

1. Wenn du Zucker in den Tee gibst, dann wird der Tee gut schmecken.

Wenn du Zucker und Dieselöl in den Tee gibst, dann wird der Tee gut schmecken.

Einst, im Kalten Krieg

Zwei Politologen diskutieren

- Wenn Russland angreift, dann greift Amerika auch an.
- Herr Kollege, ich stimme ihnen nicht zu: Was Sie sagen, ist falsch.

Gültig (Negation des Konditionals)

$$\neg(p \rightarrow q) \models (p \wedge \neg q)$$

Aber ...

1. Es ist nicht der Fall, dass: Wenn Russland angreift, dann greift Amerika (auch) an.

Russland greift an, und Amerika greift nicht an.

Einst, im Kalten Krieg

Zwei Politologen diskutieren

- Wenn Russland angreift, dann greift Amerika auch an.
- Herr Kollege, ich stimme ihnen nicht zu: Was Sie sagen, ist falsch.

Gültig (Negation des Konditionals)

$$\neg(p \rightarrow q) \models (p \wedge \neg q)$$

Aber ...

1. Es ist nicht der Fall, dass: Wenn Russland angreift, dann greift Amerika (auch) an.

Russland greift an, und Amerika greift nicht an.

Einst, im Kalten Krieg

Zwei Politologen diskutieren

- Wenn Russland angreift, dann greift Amerika auch an.
- Herr Kollege, ich stimme ihnen nicht zu: Was Sie sagen, ist falsch.

Gültig (Negation des Konditionals)

$$\neg(p \rightarrow q) \models (p \wedge \neg q)$$

Aber ...

1. Es ist nicht der Fall, dass: Wenn Russland angreift, dann greift Amerika (auch) an.

Russland greift an, und Amerika greift nicht an.

Starker Regen

Gültig (eine Variante des *modus tollens*)

$$(p \rightarrow \neg q), q \models \neg p$$

Aber ...

1. Wenn es regnet, dann regnet es nicht stark.
2. Es regnet stark.

Es regnet nicht.

Starker Regen

Gültig (eine Variante des *modus tollens*)

$$(p \rightarrow \neg q), q \models \neg p$$

Aber ...

1. Wenn es regnet, dann regnet es nicht stark.
2. Es regnet stark.

Es regnet nicht.

Sprung in den Weltuntergang

Gültig (Gesetz des Duns Scotus mit Deduktionstheorem)

$$\neg p \models (p \rightarrow q)$$

Aber ...

1. Ich kann nicht 2m hoch springen.

Wenn ich 2m hoch springen kann, dann geht die Welt unter.

(Dank an meinen Kollegen Aaron Hochwald für die Inspiration zu diesem Beispiel.)

Sprung in den Weltuntergang

Gültig (Gesetz des Duns Scotus mit Deduktionstheorem)

$$\neg p \models (p \rightarrow q)$$

Aber ...

1. Ich kann nicht 2m hoch springen.

Wenn ich 2m hoch springen kann, dann geht die Welt unter.

(Dank an meinen Kollegen Aaron Hochwald für die Inspiration zu diesem Beispiel.)

Meine Sterblichkeit

Gültig (Axiom der Konditionalisierung mit Deduktionstheorem)

$$p \models (q \rightarrow p)$$

Aber ...

1. Ich werde morgen noch leben.

Wenn ich heute sterbe, dann werde ich morgen noch leben.

Meine Sterblichkeit

Gültig (Axiom der Konditionalisierung mit Deduktionstheorem)

$$p \models (q \rightarrow p)$$

Aber ...

1. Ich werde morgen noch leben.

Wenn ich heute sterbe, dann werde ich morgen noch leben.

Graz und die Fahrräder in China

Tautologie

$$\models ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$$

Aber ...

Wenn Graz die Landeshauptstadt des Burgenlandes ist, dann fällt auf dem Platz des Himmlischen Friedens ein Fahrrad um — oder, wenn auf dem Platz des Himmlischen Friedens ein Fahrrad umfällt, dann ist Graz die Landeshauptstadt des Burgenlandes.

Graz und die Fahrräder in China

Tautologie

$$\models ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$$

Aber ...

Wenn Graz die Landeshauptstadt des Burgenlandes ist, dann fällt auf dem Platz des Himmlischen Friedens ein Fahrrad um — oder, wenn auf dem Platz des Himmlischen Friedens ein Fahrrad umfällt, dann ist Graz die Landeshauptstadt des Burgenlandes.

Das lässt sich noch zuspitzen

Peter und Quentin diskutieren

Peter: Es wird einen dritten Weltkrieg geben.

Quentin: Es ist nicht der Fall, dass es einen dritten Weltkrieg geben wird.

Tautologie

$$\models ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$$

Aber ...

Wenn Peter Recht hat, dann hat Quentin Recht — oder, wenn Quentin Recht hat, dann hat Peter Recht.

Das lässt sich noch zuspitzen

Peter und Quentin diskutieren

Peter: Es wird einen dritten Weltkrieg geben.

Quentin: Es ist nicht der Fall, dass es einen dritten Weltkrieg geben wird.

Tautologie

$$\models ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$$

Aber ...

Wenn Peter Recht hat, dann hat Quentin Recht — oder, wenn Quentin Recht hat, dann hat Peter Recht.

Das lässt sich noch zuspitzen

Peter und Quentin diskutieren

Peter: Es wird einen dritten Weltkrieg geben.

Quentin: Es ist nicht der Fall, dass es einen dritten Weltkrieg geben wird.

Tautologie

$$\models ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$$

Aber ...

Wenn Peter Recht hat, dann hat Quentin Recht — oder, wenn Quentin Recht hat, dann hat Peter Recht.

Eine seltsame Wahl

Gültig (Kettenschluss, hypothetischer Syllogismus)

$$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \models (p \rightarrow r)$$

Aber ...

1. Wenn Smith vor der Wahl stirbt, dann gewinnt Jones die Wahl.
2. Wenn Jones die Wahl gewinnt, dann wird Smith sich aus der Politik zurückziehen und zur Ruhe setzen.

Wenn Smith vor der Wahl stirbt, dann wird Smith sich aus der Politik zurückziehen und zur Ruhe setzen.

Eine seltsame Wahl

Gültig (Kettenschluss, hypothetischer Syllogismus)

$$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \models (p \rightarrow r)$$

Aber ...

1. Wenn Smith vor der Wahl stirbt, dann gewinnt Jones die Wahl.
2. Wenn Jones die Wahl gewinnt, dann wird Smith sich aus der Politik zurückziehen und zur Ruhe setzen.

Wenn Smith vor der Wahl stirbt, dann wird Smith sich aus der Politik zurückziehen und zur Ruhe setzen.

Literatur

Sainsbury, Mark: *Logical Forms. An Introduction to Philosophical Logic*, Malden (MA) u.a., 2. Aufl. 2001.

Kamitz, Reinhard jun.: *Wenn P, dann Q. Zum Problem der Formalisierbarkeit von Konditionalsätzen durch Subjunktionen*, Wien u.a. 2014 (Austria: Forschung und Wissenschaft / Philosophie 19).

Kamitz, Reinhard: *Logik — Faszination der Klarheit. Eine Einführung für Philosophinnen und Philosophen mit zahlreichen Anwendungsbeispielen*, 2 Bde., Wien u.a. 2007 (Einführungen Philosophie 11f.).