Folgerungsbeziehungen und Äquivalenzen (2)

(nach einem Merkblatt von Univ.-Prof. Dr. R. Kamitz)

Einige sehr bekannte quantorenlogische Folgerungsbeziehungen und Äquivalenzen. Alle junktorenlogischen Folgerungsbeziehungen und Äquivalenzen — darunter auch jene, die in dem Merkblatt über Elementare Logik I angeführt wurden — sind auch quantorenlogisch gültig. Darüber hinaus gilt aber außerdem:

1 Folgerungsbeziehungen

1. Spezialisierung: $\{\forall\alpha\varphi\} \models$ jedes beliebige Ergebnis einer Einsetzung für α in φ
2. Partikularisierung (existenzielle Generalisierung): {ein beliebiges Ergebnis einer Einsetzung für α in φ} $\models \exists\alpha\varphi$
3. Abschwächung der Allquantifikation zur Existenzquantifikation: $\{\forall\alpha\varphi\} \models \exists\alpha\varphi$
4. Quantorentausch: $\{\exists\alpha\forall\beta\varphi\} \models \forall\beta\exists\alpha\varphi$
5. Quantorendistribution: $\{\exists\alpha(\varphi \wedge \psi)\} \models (\exists\alpha\varphi \wedge \exists\alpha\psi)$
   $\{(\forall\alpha\varphi \vee \forall\alpha\psi)\} \models \forall\alpha(\varphi \vee \psi)$
   $\{\forall\alpha(\varphi \rightarrow \psi)\} \models (\forall\alpha\varphi \rightarrow \forall\alpha\psi)$
   $\{\forall\alpha(\varphi \rightarrow \psi)\} \models (\exists\alpha\varphi \rightarrow \exists\alpha\psi)$
6. Quantorenverschiebung[1]: $\{\forall\alpha(\varphi \leftrightarrow \psi)\} \models (\forall\alpha\varphi \leftrightarrow \psi)$
   $\{\forall\alpha(\varphi \leftrightarrow \psi)\} \models (\exists\alpha\varphi \leftrightarrow \psi)$
   $\{(\forall\alpha\varphi \leftrightarrow \psi)\} \models \exists\alpha(\varphi \leftrightarrow \psi)$
   $\{(\exists\alpha\varphi \leftrightarrow \psi)\} \models \exists\alpha(\varphi \leftrightarrow \psi)$

[1] ψ sei geschlossen.

2 Äquivalenzen

In jeder Formelgruppe sind beide Formeln miteinander äquivalent:

1. Quantorentausch: $\forall\alpha\forall\beta\varphi$, $\forall\beta\forall\alpha\varphi$
   $\exists\alpha\exists\beta\varphi$, $\exists\beta\exists\alpha\varphi$

2. Quantorendistribution: $\forall\alpha(\varphi \wedge \psi)$, $(\forall\alpha\varphi \wedge \forall\alpha\psi)$
   $\exists\alpha(\varphi \vee \psi)$, $(\exists\alpha\varphi \vee \exists\alpha\psi)$

3. Quantorennegation: $\neg\forall\alpha\varphi$, $\exists\alpha\neg\varphi$
   $\neg\exists\alpha\varphi$, $\forall\alpha\neg\varphi$
   $\neg\forall\alpha\neg\varphi$, $\exists\alpha\varphi$
   $\neg\exists\alpha\neg\varphi$, $\forall\alpha\varphi$

4. Quantorenverschiebung[2]: $\mathrm{Q}\alpha(\varphi \wedge \psi)$, $(\mathrm{Q}\alpha\varphi \wedge \psi)$
   $\mathrm{Q}\alpha(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \wedge \mathrm{Q}\alpha\varphi)$
   $\mathrm{Q}\alpha(\varphi \vee \psi)$, $(\mathrm{Q}\alpha\varphi \vee \psi)$
   $\mathrm{Q}\alpha(\psi \vee \varphi)$, $(\psi \vee \mathrm{Q}\alpha\varphi)$
   $\mathrm{Q}\alpha(\psi \rightarrow \varphi)$, $(\psi \rightarrow \mathrm{Q}\alpha\varphi)$
   $\mathrm{Q}\alpha(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\mathrm{Q}'\alpha\varphi \rightarrow \psi)$

[2] α komme in ψ nicht frei vor; $\mathrm{Q}\alpha$ sei ein Quantifikator und $\mathrm{Q}'\alpha$ der Gegenquantifikator.