Merkblatt zum Formalisieren in der Quantorenlogik

(nach einem Merkblatt von Univ.-Prof. Dr. R. Kamitz)

1. Formalisiert werden Aussagen, in unserem Falle: deutsche Aussagen. Damit sind auch Argumente formalisierbar, da jedes Argument aus Aussagen — nämlich aus einer Konklusion und einer oder mehreren Prämissen — besteht.

2. Eine Aussage wird formalisiert, indem man ihr einen quantorenlogischen Satz φ zuordnet, der diese Aussage dann in der nachfolgenden logischen Analyse vertritt: Man sagt dann auch, dass die betreffende Aussage durch φ formalisiert wird.

3. Für alle Formalisierungen von Aussagen gilt:
   (a) das Synonymieprinzip: Synonyme Aussagen dürfen durch denselben quantorenlogischen Satz formalisiert werden.
   (b) das Äquivalenzprinzip: wird eine Aussage durch einen quantorenlogischen Satz φ formalisiert, so darf sie auch durch jeden anderen, mit φ äquivalenten quantorenlogischen Satz formalisiert werden.

4. Jede Formalisierung vollzieht sich relativ zu einem vorab festgelegten Formalisierungsschlüssel. Jeder Formalisierungsschlüssel besteht aus Abkürzungen. In einem quantorenlogischen Formalisierungsschlüssel sind 3 Arten von Abkürzungen möglich (wobei nicht in jedem quantorenlogischen Formalisierungsschlüssel alle drei Arten von Abkürzungen vorkommen müssen):
   (a) Aussagen werden durch Satzbuchstaben abgekürzt (wie in der Junktorenlogik: Elementare Logik I),
   (b) Namen werden durch Individuenkonstanten abgekürzt,
   (c) Aussageformen werden durch Prädikate abgekürzt (und zwar einstellige Aussageformen durch einstellige Prädikate, zweistellige Aussageformen durch zweistellige Prädikate, usw.)

5. Ein simples Beispiel für einen quantorenlogischen Formalisierungsschlüssel ist die folgende Menge von Abkürzungen:
   H^1 : --- ist ein Hund.
   F^1 : --- ist ein Fleischfresser.
   G^1 : --- gehört dem Bürgermeister.
   B^2 : --- ist bissiger als ---.
   r : Rex
   a : Astor

   (In diesem Formalisierungsschlüssel kommen Abkürzungen durch Satzbuchstaben nicht vor.) Alle folgenden Formalisierungsbeispiele erfolgen relativ zu diesem speziellen Formalisierungsschlüssel.

6. Soll eine Aussage relativ zu einem vorab festgelegten Formalisierungsssclüssel formalisiert werden, so darf der Aussage nicht willkürlich irgendein beliebiger quantorenlogischer Satz zugeordnet werden; vielmehr kommt nur ein solcher quantorenlogischer Satz in Frage, der relativ zum festgelegten Formalisierungsschlüssel dasselbe zum Ausdruck bringt wie die zu formalisierende Aussage.

7. Man kann 3 Arten von Formalisierungen (in der Quantorenlogik) unterscheiden:
   (a) solche, in denen die zu formalisierende Aussage durch einen atomaren quantorenlogischen Satz formalisiert wird;
   (b) solche, in denen die zu formalisierende Aussage durch einen molekularen quantorenlogischen Satz (d.h. durch eine Negation, Konjunktion, Disjunktion, Subjunktion oder Bisubjunktion) formalisiert wird;
   (c) solche, in denen die zu formalisierende Aussage durch eine geschlossene Quantifikation formalisiert wird.

   Von Formalisierungen dieser drei Arten soll nun die Rede sein.

1 Formalisierung durch atomare Sätze

1. Wird in dem festgelegten Formalisierungsschlüssel eine Aussage durch einen Satzbuchstaben abgekürzt, so darf die betreffende Aussage durch diesen Satzbuchstaben formalisiert werden.

2. Entsteht eine Aussage aus einer in dem festgelegten Formalisierungsschlüssel abgekürzten Aussageform dadurch, dass man die Leerstellen der Aussageform von links nach rechts durch Namen ersetzt, die gleichfalls in dem festgelegten Formalisierungsschlüssel abgekürzt werden, dann darf diese Aussage durch einen quantorenlogischen Satz formalisiert werden, von dem gilt:

   (a) Er beginnt mit dem die Aussageform abkürzenden Prädikat;

   (b) Auf dieses Prädikat folgen der Reihe nach jene Individuenkonstanten, die als Abkürzungen der betreffenden Namen fungieren.

   Daher darf z.B. formalisiert werden:

   - Die Aussage ‚Rex ist ein Hund' durch ‚H^1r'
   - Die Aussage ‚Astor ist ein Fleischfresser' durch ‚F^1a'
   - Die Aussage ‚Rex ist bissiger als Astor' durch ‚B^2ra'
   - Die Aussage ‚Astor ist bissiger als Rex' durch ‚B^2ar'
   - Die Aussage ‚Rex gehört dem Bürgermeister' durch ‚G^1r'

2 Formalisierung durch molekulare Sätze

Hier gelten die bereits in der Junktorenlogik (Elementare Logik I) besprochenen Regeln. Daher darf z.B. formalisiert werden:

- Die Aussage ‚Astor ist kein Fleischfresser' durch ‚$\neg F^1a$'
- Die Aussage ‚Wenn Rex ein Hund ist, dann ist Rex ein Fleischfresser' durch ‚$(H^1r \rightarrow F^1r)$'
- Die Aussage ‚Nur wenn Rex ein Hund ist, (dann) ist Rex ein Fleischfresser' (bzw. die mit ihr synonyme Aussage ‚Rex ist nur dann ein Fleischfresser, wenn Rex ein Hund ist') durch ‚$(F^1r \rightarrow H^1r)$'
- Die Aussage ‚Astor ist ein Hund, der dem Bürgermeister gehört' (bzw. die mit ihr synonyme Aussage ‚Astor ist ein Hund und Astor gehört dem Bürgermeister') durch ‚$(H^1a \wedge G^1a)$'
- Die Aussage ‚Astor und Rex gehören dem Bürgermeister' (bzw. die mit ihr synonyme Aussage ‚Astor gehört dem Bürgermeister und Rex gehört dem Bürgermeister') durch ‚$(G^1a \wedge G^1r)$'

3 Formalisierung durch Quantifikationen

1. Formalisierung durch <u>Allquantifikationen</u>:
   Zu den durch Allquantifikationen formalisierbaren Aussagen gehören vor allem Aussagen der folgenden 3 Arten:

   (a) Aussagen der Art <u>‚Jedes A ist (ein) B'</u> z.B. ‚Jeder Hund ist ein Fleischfresser'. Aussagen dieser Art werden formalisiert wie
   // Für <u>alle</u> x gilt: <u>wenn</u> x (ein) A ist, <u>dann</u> ist x (ein) B,
   also z.B. wie
   // Für <u>alle</u> x gilt: <u>wenn</u> x (ein) Hund ist, <u>dann</u> ist x (ein) Fleischfresser.
   (Statt der Variablen ‚x' kann natürlich ebenso gut jede andere Variable verwendet werden.)
   Daher darf z.B. formalisiert werden:

   - Die Aussage ‚Jeder Hund ist ein Fleischfresser' (bzw. die mit ihr synonymen Aussagen ‚Alle Hunde sind Fleischfresser' und ‚Hunde sind Fleischfresser') durch ‚$\forall x(H^1x \rightarrow F^1x)$'

- Die Aussage ‚Jeder Hund gehört dem Bürgermeister' (bzw. die mit ihr synonyme Aussage ‚Alle Hunde gehören dem Bürgermeister') durch ‚$\forall x(H^1x \rightarrow G^1x)$'
- Die Aussage ‚Jeder Hund, der dem Bürgermeister gehört, ist bissiger als Rex' durch ‚$\forall x((H^1x \wedge G^1x) \rightarrow B^2xr)$'
- Die Aussage ‚Jeder Hund gehört dem Bürgermeister und ist bissiger als Rex' durch ‚$\forall x(H^1x \rightarrow (G^1x \wedge B^2xr))$'

Da quantorenlogische Sätze der Art $\forall\alpha(\varphi \rightarrow \psi)$ und der Art $\neg\exists\alpha(\varphi\wedge\neg\psi)$ äquivalent sind, können die genannten Aussagen auch durch quantorenlogische Sätze der zweiten Art formalisiert werden, z.B.

- die Aussage ‚Jeder Hund ist ein Fleischfresser' durch $\neg\exists x(H^1x \wedge \neg F^1x)$

(b) Aussagen der Art ‚Kein A ist (ein) B', z.B. ‚Kein Hund ist ein Fleischfresser'. Aussagen dieser Art werden formalisiert wie

// Für alle x gilt: wenn x (ein) A ist, dann ist x kein B,
also z.B. wie
// Für alle x gilt: wenn x (ein) Hund ist, dann ist x kein Fleischfresser.

(Statt der Variablen ‚x ' kann natürlich ebenso gut jede andere Variable verwendet werden.) Daher darf z.B. formalisiert werden:

- Die Aussage ‚Kein Hund ist ein Fleischfresser' (bzw. die mit ihr synonyme Aussage ‚Hunde sind keine Fleischfresser') durch ‚$\forall x(H^1x \rightarrow \neg F^1x)$'
- Die Aussage ‚Kein Hund gehört dem Bürgermeister' (bzw. die mit ihr synonyme Aussage ‚Dem Bürgermeister gehören keine Hunde') durch ‚$\forall x(H^1x \rightarrow \neg G^1x)$'
- Die Aussage ‚Kein Hund, der dem Bürgermeister gehört, ist bissiger als Rex' durch ‚$\forall x((H^1x \wedge G^1x) \rightarrow \neg B^2xr)$'

Da quantorenlogische Sätze der Art $\forall\alpha(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ und der Art $\neg\exists\alpha(\varphi\wedge\psi)$ äquivalent sind, können die genannten Aussagen auch durch quantorenlogische Sätze der zweiten Art formalisiert werden, z.B.

- die Aussage ‚Kein Hund ist ein Fleischfresser' durch ‚$\neg\exists x(H^1x \wedge F^1x)$'

(c) Aussagen der Art ‚Nur As sind Bs', z.B. ‚Nur Hunde sind Fleischfresser'. Aussagen dieser Art werden formalisiert wie

// Für alle x gilt: nur wenn x (ein) A ist, dann ist x (ein) B,
also z.B. wie
// Für alle x gilt: nur wenn x (ein) Hund ist, dann ist x (ein) Fleischfresser.

Aufgrund der Analyse von Nur-wenn-dann-Sätzen in der Elementaren Logik I wissen wir, dass damit dasselbe zum Ausdruck kommt wie in

// Für alle x gilt: wenn x (ein) B ist, dann ist x (ein) A,
also z.B. wie in
// Für alle x gilt: wenn x (ein) Fleischfresser ist, dann ist x (ein) Hund.

(Statt der Variablen x kann natürlich ebenso gut jede andere Variable verwendet werden, man beachte aber, dass einem Nur-wenn-dann-Satz ein Wenn-dann-Satz mit vertauschten Gliedern entspricht!)

2. Formalisierung durch Existenzquantifikationen:
Zu den durch Existenzquantifikationen formalisierbaren Aussagen gehören vor allem Aussagen der folgenden 2 Arten:

(a) Aussagen der Art ‚Mindestens ein A ist (ein) B', z.B. ‚Mindestens ein Hund gehört dem Bürgermeister' (d.h. dass mindestens ein Hund etwas ist, das dem Bürgermeister gehört). Aussagen dieser Art werden formalisiert wie

// Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: x ist (ein) A und x ist ein B,
also z.B wie
// Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: x ist (ein) Hund und x gehört dem Bürgermeister.

ACHTUNG! Es ist ein oft begangener Anfängerfehler, Aussagen dieser Art zu formalisieren wie

// Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: wenn x ein A ist, dann ist x ein B.

Dies besagt etwas ganz anderes, und zwar etwas viel Schwächeres. Die Aussage ‚Mindestens ein Hund gehört dem Bürgermeister' darf daher nicht formalisiert werden wie

// Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: wenn x ein Hund ist, dann gehört x dem Bürgermeister.

(Statt der Variablen x kann natürlich ebenso gut jede andere Variable verwendet werden.) Daher darf z.B. formalisiert werden:

- Die Aussage ‚Mindestens ein Hund gehört dem Bürgermeister' durch ‚$\exists x(H^1x \land G^1x)$'
- Die Aussage ‚Mindestens ein Hund ist bissiger als Rex' durch ‚$\exists x(H^1x \land B^2xr)$'
- Die Aussage ‚Mindestens ein Hund des Bürgermeisters ist bissiger als Rex' durch ‚$\exists x((H^1x \land G^1x) \land B^2xr)$'

KONVENTION: In der Logik wird häufig beschlossen, Aussagen der Art ‚Einige As sind Bs' bzw. ‚Manche As sind Bs' bzw. ‚Es gibt As, die Bs sind', ungeachtet ihrer Formulierung im Plural, so wie Aussagen der Art ‚Mindestens ein A ist (ein) B' zu formalisieren. Dieser Konvention wollen wir uns anschließen. Daher darf z.B. formalisiert werden:

- Die Aussage ‚Manche Hunde, die dem Bürgermeister gehören, sind bissiger als Rex' durch ‚$\exists x((H^1x \land G^1x) \land B^2xr)$'

(b) Aussagen der Art ‚Mindestens ein A ist kein B' bzw. ‚Mindestens ein A ist nicht B', z.B. ‚Mindestens ein Hund ist kein Fleischfresser'. Aussagen dieser Art werden formalisiert wie

// Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: x ist (ein) A und x ist kein (bzw.: nicht) B, also z.B. wie

// Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: x ist (ein) Hund und x ist kein Fleischfresser.

ACHTUNG! Man hüte sich auch hier vor dem schon genannten Anfängerfehler. Aussagen der Art (b) dürfen nicht formalisiert werden wie

// Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: wenn x (ein) A ist, dann ist x kein B.

Daher darf die Aussage ‚Mindestens ein Hund ist kein Fleischfresser' nicht formalisiert werden wie

// Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: wenn x (ein) Hund ist, dann ist x kein Fleischfresser.

(Statt der Variablen x kann natürlich ebenso gut jede andere Variable verwendet werden.) Daher darf z.B. formalisiert werden:

- Die Aussage ‚Mindestens ein Hund ist kein Fleischfresser' durch ‚$\exists x(H^1x \land \neg F^1x)$'
- Die Aussage ‚Mindestens ein Hund gehört nicht dem Bürgermeister' durch ‚$\exists x(H^1x \land \neg G^1x)$'

KONVENTION: In der Logik wird häufig beschlossen, Aussagen der Art ‚Einige As sind nicht B', ‚Manche As sind keine Bs', ‚Es gibt As, die keine Bs sind' etc., ungeachtet ihrer Formulierung im Plural, so wie Aussagen der Art ‚Mindestens ein A ist kein B' bzw. ‚Mindestens ein A ist nicht B' zu formalisieren. Dieser Konvention wollen wir uns anschließen. Daher darf z.B. formalisiert werden:

- Die Aussage ‚Einige Hunde sind keine Fleischfresser' (bzw. die mit ihr synonyme Aussage ‚Manche Hunde sind keine Fleischfresser') durch ‚$\exists x(H^1x \land \neg F^1x)$'
- Die Aussage ‚Es gibt Hunde, die bissiger sind als Astor und die nicht dem Bürgermeister gehören' durch ‚$\exists x((H^1x \land B^2xa) \land \neg G^1x)$'

. – . – . – . – . – .

Fußnote zum Anfängerfehler: Man hüte sich davor, Aussagen durch quantorenlogische Sätze der Art $\exists\alpha(\varphi \to \psi)$ zu formalisieren; derartige Sätze sind nur in äußerst seltenen Fällen zur Formalisierung von Aussagen geeignet.