Übung zur Elementaren Logik I
Michael Matzer

Die „CND-Expressmethode“[1] zum Ausfüllen von Wahrheitstafeln

Dieses Papier stellt eine Methode vor, die das Ausfüllen von Wahrheitstafeln erheblich beschleunigt und auch die Fehleranfälligkeit des Verfahrens möglicherweise reduzieren kann. Dabei wird nichts anderes vorausgesetzt als die Kenntnis der Semantik der einzelnen Junktoren, d.h. die Wahrheits- bzw. Falschheitsbedingungen für Konjunktionen, Disjunktionen, etc., die für die Erstellung von Wahrheitstafeln ohnehin vorausgesetzt werden muss. Sie wird nur aus einem Blickwinkel beleuchtet, die das einzelne Hervorbringen von Wahrheitswerten überflüssig macht zugunsten einer mechanischen Bearbeitung in etwas größeren Schritten, die weitgehend Übertragung (lies: „Abschreiben“) ist.

Negationen

Negationen füllt man am besten spaltenweise aus: Man liest von oben nach unten in je einer Zeile den Wahrheitswert des Negationsgliedes; wo er *wahr / Eins (‚1‘)* ist, setze man eine *Null (‚0‘)* unter den Negator; wo er *falsch / Null (‚0‘)* ist, setze man unter den Negator eine *Eins (‚1‘)*. Mit etwas Übung geht das ganz automatisch!

Konjunktionen

Machen wir bezüglich der Konjunktion zwei Beobachtungen:

1. Eine Konjunktion ist bekanntlich *wahr* genau dann, wenn *beide* Glieder *wahr* sind. D.h. nun, eine Konjunktion, die *mindestens ein falsches* Glied hat, ist *falsch* – und zwar *unabhängig* von dem anderen Glied. Das ist, beispielhaft für die Falschheitsfälle des ersten Gliedes, nichts anderes als die Beschreibung der dritten und vierten Zeile des Wahrheitstafelschemas für Konjunktionen:

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	**0**
0	0	**0**

   Diese erste Beobachtung liefert die ersten beiden Schritte zum Ausfüllen einer Spalte unter einem Konjunktor:

   - Eines der beiden Konjunktionsglieder (willkürlich) auswählen und in Gedanken zunächst „festhalten“.
   - Wo dieses *falsch / Null (‚0‘)* ist, ungeachtet des anderen Konjunktionsgliedes eine *Null (‚0‘)* eintragen.

2. Bei allen Bewertungen, wo dieses ausgewählte Glied *wahr* ist, hat die Konjunktion *denselben* Wahrheitswert wie das andere (hier das zweite) Glied. Das kann man an den ersten beiden Zeilen des Wahrheitstafelschemas für Konjunktionen ablesen:

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	1	0
0	0	0

   Diese zweite Beobachtung liefert den dritten und letzten Schritt zum Ausfüllen einer Spalte unter einem Konjunktor:

   - In die verbleibenden Lücken das *andere* (nicht ausgewählte) Konjunktionsglied *übertragen.*

[1] Ich habe diese Methode so genannt, weil sie an ein Verfahren aus dem Entwurf kombinatorischer Schaltnetzwerke (engl. *combinational network design*, abgek. „CND“) angelehnt ist.

Disjunktionen

Eine analoge Überlegung wie bei der Konjunktion ist auch bei der Disjunktion möglich:

1. Eine Disjunktion ist bekanntlich *falsch* genau dann, wenn *beide* Glieder *falsch* sind. D.h. nun, eine Disjunktion, die *mindestens ein wahres* Glied hat, ist *wahr* – und zwar *unabhängig* von dem anderen Glied. Das ist, beispielhaft für die Wahrheitsfälle des ersten Gliedes, nichts anderes als die Beschreibung der ersten und zweiten Zeile des Wahrheitstafelschemas für Disjunktionen:

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	1
0	0	0

   Diese erste Beobachtung liefert die ersten beiden Schritte zum Ausfüllen einer Spalte unter einem Disjunktor:

   - Eines der beiden Disjunktionsglieder (willkürlich) auswählen und in Gedanken zunächst „festhalten".
   - Wo dieses *wahr / Eins (‚1')* ist, ungeachtet des anderen Disjunktionsgliedes eine *Eins (‚1')* eintragen.

2. Bei allen Bewertungen, wo dieses ausgewählte Glied *falsch* ist, hat die Disjunktion *denselben* Wahrheitswert wie das andere (hier das zweite) Glied. Das kann man an den letzten beiden Zeilen des Wahrheitstafelschemas für Disjunktionen ablesen:

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$
1	1	1
1	0	1
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

   Diese zweite Beobachtung liefert den dritten und letzten Schritt zum Ausfüllen einer Spalte unter einem Disjunktor:

   - In die verbleibenden Lücken das *andere* (nicht ausgewählte) Disjunktionsglied *übertragen.*

Subjunktionen

Auch auf die Subjunktion lässt sich eine ähnliche Überlegung anwenden; lediglich die Willkürlichkeit der Auswahl des eines Subjunktionsgliedes im zweiten Schritt fällt[2] weg:

1. Eine Subjunktion ist bekanntlich *wahr* genau dann, wenn ihr *Vorderglied falsch* ist. D.h. nun, eine Subjunktion, die ein *falsches Vorderglied* hat, ist *wahr* – und zwar *unabhängig* vom Nachglied. Das ist nichts anderes als die Beschreibung der dritten und vierten Zeile des Wahrheitstafelschemas für Subjunktionen:

φ	ψ	$(\varphi \to \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	**1**
0	0	**1**

   Diese erste Beobachtung liefert die ersten beiden Schritte zum Ausfüllen einer Spalte unter einem Subjunktor:

   - Das Vorderglied in Gedanken zunächst „festhalten".
   - Wo dieses *falsch / Null (‚0')* ist, ungeachtet des Nachgliedes eine *Eins (‚1')* eintragen.

[2]aufgrund der Nicht-Kommutativität der Subjunktion

2. Bei allen Bewertungen, wo das Vorderglied *wahr* ist, hat die Subjunktion *denselben* Wahrheitswert wie das Nachglied. Das kann man an den ersten beiden Zeilen des Wahrheitstafelschemas für Subjunktionen ablesen:

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	1	1
0	0	1

Diese zweite Beobachtung liefert den dritten und letzten Schritt zum Ausfüllen einer Spalte unter einem Subjunktor:

- In die verbleibenden Lücken das *Nachglied übertragen.*

Bisubjunktionen

Bisubjunktionen verhalten sich bei diesem Verfahren am unhandlichsten; es bleibe der Leserin oder dem Leser überlassen, ob er oder sie sich die hier angestellte, zu den übrigen Fällen analoge Überlegung zunutze machen will oder lieber bei zeilenweisem Vergleichen und Eintragen einer Eins (‚1‘) bei Gleichheit und Eintragen einer Null (‚0‘) bei Ungleichheit der Wahrheitswerte der Glieder bleibt. Machen wir dennoch, wie bisher, die zwei Beobachtungen:

1. Eine Bisubjunktion ist bekanntlich *wahr* genau dann, wenn ihr *beide Glieder denselben* Wahrheitswert haben. D.h. nun, bei allen Bewertungen, wo das eine Glied *wahr* ist, hat die Bisubjunktion *denselben* Wahrheitswert wie das andere Glied. Das ist, beispielhaft für die Wahrheitsfälle des ersten Gliedes, nichts anderes als die Beschreibung der ersten und zweiten Zeile des Wahrheitstafelschemas für Bisubjunktionen:

φ	ψ	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	1	0
0	0	1

Diese erste Beobachtung liefert die ersten beiden Schritte zum Ausfüllen einer Spalte unter einem Bisububjunktor:

- Eines der beiden Bisubjunktionsglieder (willkürlich) auswählen und in Gedanken zunächst „festhalten“.
- Wo dieses *wahr / Eins (‚1‘)* ist, das andere (nicht ausgewählte) Bisubjunktionsglied *übertragen.*

2. Bei allen Bewertungen, wo dieses ausgewählte Glied *falsch* ist, hat die Bisubjunktion *denselben* Wahrheitswert wie die *Negation* des anderen (hier des zweiten) Gliedes. Das kann man an den letzten beiden Zeilen des Wahrheitstafelschemas für Bisubjunktionen ablesen:

φ	ψ	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	**1**	**0**
0	**0**	**1**

Diese zweite Beobachtung liefert den dritten und letzten Schritt zum Ausfüllen einer Spalte unter einem Bisubjunktor:

- In die verbleibenden Lücken die *Negation* des anderen (nicht ausgewählten) Gliedes *übertragen.*

Ein Beispiel

Die Erstellung der Wahrheitstafel für die Formel ‚$(\neg P \to (Q \vee \neg R))$' geht mit der CND-Expressmethode wie folgt vor sich:[3]

1. Aufstellung des Gerüsts für die Wahrheitstafel, d.h. Satzbuchstaben in der Reihefolge der Angabe links oben, die Formel rechts oben, und links unten die Wahrheitswertekombinationen (in der vereinbarten, systematischen Reihenfolge):

P	Q	R	$(\neg P \to (Q \vee \neg R))$
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

2. Übertragen der Wahrheitswerte der Satzbuchstaben:

P	Q	R	$(\neg P \to (Q \vee \neg R))$
1	1	1	1 1 1
1	1	0	1 1 0
1	0	1	1 0 1
1	0	0	1 0 0
0	1	1	0 1 1
0	1	0	0 1 0
0	0	1	0 0 1
0	0	0	0 0 0

3. Ausfüllen der Spalte unter ‚$\neg R$', in einem Schritt:

P	Q	R	$(\neg P \to (Q \vee \neg R))$
1	1	1	1 1 **0***1*
1	1	0	1 1 **1***0*
1	0	1	1 0 **0***1*
1	0	0	1 0 **1***0*
0	1	1	0 1 **0***1*
0	1	0	0 1 **1***0*
0	0	1	0 0 **0***1*
0	0	0	0 0 **1***0*

4. Ausfüllen der Spalte unter ‚$(Q \vee \neg R)$', in drei Schritten:

   - Auswählen und gedankliches „Festhalten" des ‚Q'.[4]
   - Eintragen einer *Eins* in allen Zeilen, wo ‚Q' *wahr (1)* ist:

P	Q	R	$(\neg P \to (Q \vee \neg R))$
1	1	1	1 ***1*** **1** 01
1	1	0	1 ***1*** **1** 10
1	0	1	1 0 01
1	0	0	1 0 10
0	1	1	0 ***1*** **1** 01
0	1	0	0 ***1*** **1** 10
0	0	1	0 0 01
0	0	0	0 0 10

[3] Dieses Beispiel mag aufgrund der wiederholten Darstellung der gesamten Wahrheitstafel nach jedem größeren Schritt etwas langwierig wirken; der den Namen der Methode rechtfertigende Geschwindigkeitsvorteil zeigt sich möglicherweise erst bei deren Anwendung.

[4] Ebenso gut ginge es mit ‚$\neg R$'; das Resultat des folgenden Schritts sähe dann anders aus, aber nach dem übernächsten wäre es mit jenem wieder identisch. Die Leserin oder der Leser ist eingeladen, dies zu versuchen!

- Übertragen der Wahrheitswerte von ‚$\neg R$' in allen Zeilen, wo ‚Q' *falsch (0)* ist:

P	Q	R	$(\neg P \rightarrow (Q \vee \neg R))$
1	1	1	1 1 1 01
1	1	0	1 1 1 10
1	0	1	1 *0* **0** **0**1
1	0	0	1 *0* **1** **1**0
0	1	1	0 1 1 01
0	1	0	0 1 1 10
0	0	1	0 *0* **0** **0**1
0	0	0	0 *0* **1** **1**0

5. Ausfüllen der Spalte unter ‚$\neg P$', in einem Schritt:

P	Q	R	$(\neg P \rightarrow (Q \vee \neg R))$
1	1	1	**0** *1* 1 1 01
1	1	0	**0** *1* 1 1 10
1	0	1	**0** *1* 0 0 01
1	0	0	**0** *1* 0 1 10
0	1	1	**1** *0* 1 1 01
0	1	0	**1** *0* 1 1 10
0	0	1	**1** *0* 0 0 01
0	0	0	**1** *0* 0 1 10

6. Ausfüllen der Spalte unter dem Hauptjunktor, in drei Schritten:

- Gedankliches „Festhalten" des Vordergliedes ‚$\neg P$'.
- Eintragen einer *Eins* in allen Zeilen, wo das Vorderglied ‚$\neg P$' *falsch (0)* ist:

P	Q	R	$(\neg P \rightarrow (Q \vee \neg R))$
1	1	1	***0*** 1 **1** 1 1 01
1	1	0	***0*** 1 **1** 1 1 10
1	0	1	***0*** 1 **1** 0 0 01
1	0	0	***0*** 1 **1** 0 1 10
0	1	1	1 0 1 1 01
0	1	0	1 0 1 1 10
0	0	1	1 0 0 0 01
0	0	0	1 0 0 1 10

- Übertragen der Wahrheitswerte des Nachgliedes ‚$(Q \vee \neg R)$' in allen Zeilen, wo das Vorderglied ‚$\neg P$' *wahr (1)* ist:

P	Q	R	$(\neg P \rightarrow (Q \vee \neg R))$
1	1	1	0 1 1 1 1 01
1	1	0	0 1 1 1 1 10
1	0	1	0 1 1 0 0 01
1	0	0	0 1 1 0 1 10
0	1	1	*1* 0 **1** 1 **1** 01
0	1	0	*1* 0 **1** 1 **1** 10
0	0	1	*1* 0 **0** 0 **0** 01
0	0	0	*1* 0 **1** 0 **1** 10

Und fertig!