

# Folgerungsbeziehungen und Äquivalenzen (1)

(nach einem Merkblatt von Univ.-Prof. Dr. R. Kamitz)

## 1 Folgerungsbeziehungen

1.  $\Delta \models \varphi$  gdw.  $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$  unerfüllbar ist.
2. Wenn  $\varphi \in \Delta$ , dann  $\Delta \models \varphi$ .
3. Wenn  $\Delta$  unerfüllbar ist, dann für jedes  $\varphi$ :  $\Delta \models \varphi$  (*ex falso sequitur quodlibet*).
4. Wenn  $\Delta \models \varphi$  und  $\Delta \subseteq \Gamma$ , dann  $\Gamma \models \varphi$  (Monotonie).
5. Wenn  $\Delta \models \varphi$  und jedes Element von  $\Delta$  aus  $\Gamma$  folgt, dann  $\Gamma \models \varphi$  (Transitivität).
6. Modus ponens:  $\{(\varphi \rightarrow \psi), \varphi\} \models \psi$
7. Modus tollens:  $\{(\varphi \rightarrow \psi), \neg\psi\} \models \neg\varphi$
8. Beseitigung und Einführung der Konjunktion:  $\{(\varphi \wedge \psi)\} \models \varphi$ ,  $\{(\varphi \wedge \psi)\} \models \psi$ ,  
 $\{\varphi, \psi\} \models (\varphi \wedge \psi)$
9. Abschwächung zur Disjunktion (engl. „*addition*“):  $\{\varphi\} \models (\varphi \vee \psi)$ ,  $\{\psi\} \models (\varphi \vee \psi)$
10. Disjunktiver Syllogismus:  $\{(\varphi \vee \psi), \neg\varphi\} \models \psi$ ,  $\{(\varphi \vee \psi), \neg\psi\} \models \varphi$
11. Fallunterscheidung (Konstruktives Dilemma):  $\{(\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \chi), (\psi \rightarrow \chi)\} \models \chi$
12. Kettenschluss (Hypothetischer Syllogismus):  $\{(\varphi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \chi)\} \models (\varphi \rightarrow \chi)$

## 2 Äquivalenzen

In jeder Formelgruppe sind alle Formeln miteinander äquivalent:

### 1. Kommutativität

- (a) der Konjunktion:  $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \varphi)$
- (b) der Disjunktion:  $(\varphi \vee \psi), (\psi \vee \varphi)$
- (c) der Bisubjunktion:  $(\varphi \leftrightarrow \psi), (\psi \leftrightarrow \varphi)$

### 2. Assoziativität

- (a) der Konjunktion:  $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)), ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$
- (b) der Disjunktion:  $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)), ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$
- (c) der Bisubjunktion:  $(\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)), ((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi)$

### 3. Negation

- (a) der Negation (Doppelte Negation):  $\neg\neg\varphi, \varphi$
- (b) der Konjunktion (DeMorgans Gesetz):  $\neg(\varphi \wedge \psi), (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- (c) der Disjunktion (DeMorgans Gesetz):  $\neg(\varphi \vee \psi), (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- (d) der Subjunktion:  $\neg(\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \wedge \neg\psi)$
- (e) der Bisubjunktion:  $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \neg\psi), (\neg\varphi \leftrightarrow \psi), ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$

### 4. Importation/Exportation: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$

### 5. Kontraposition (Transposition):

- (a)  $(\varphi \rightarrow \psi), (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
- (b)  $(\varphi \rightarrow \neg\psi), (\psi \rightarrow \neg\varphi)$
- (c)  $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\neg\psi \rightarrow \varphi)$

### 6. Definition

- (a) der Subjunktion:
  - i.  $(\varphi \rightarrow \psi), (\neg\varphi \vee \psi)$
  - ii.  $(\varphi \rightarrow \psi), \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
- (b) der Bisubjunktion:
  - i.  $(\varphi \leftrightarrow \psi), ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$
  - ii.  $(\varphi \leftrightarrow \psi), ((\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$