Der aussagenlogische Kalkül des natürlichen Schließens

(nach einem Papier von Dr. Reinhard Kamitz jun.)

11 Regeln: (mit ‚*' gekennzeichnete Regeln sind Annahmebeseitigungsregeln)

1. Annahmeeinführung (AE)

$n.\ (n)$	φ	AE

2. Konjunktionseinführung ($\wedge$E)

$k.\ (k_1 \dots k_r)$	φ	
$m.\ (m_1 \dots m_s)$	ψ	
$n.\ (k_1 \dots k_r, m_1 \dots m_s)$	$(\varphi \wedge \psi)$	k, m, $\wedge$E

3. Konjunktionsbeseitigung ($\wedge$B)

$k.\ (k_1 \dots k_r)$	$(\varphi \wedge \psi)$	
$n.\ (k_1 \dots k_r)$	φ	k, $\wedge$B

oder

$k.\ (k_1 \dots k_r)$	$(\varphi \wedge \psi)$	
$n.\ (k_1 \dots k_r)$	ψ	k, $\wedge$B

4. Disjunktionseinführung ($\vee$E)

$k.\ (k_1 \dots k_r)$	φ	
$n.\ (k_1 \dots k_r)$	$(\varphi \vee \psi)$	k, $\vee$E

oder

$k.\ (k_1 \dots k_r)$	φ	
$n.\ (k_1 \dots k_r)$	$(\psi \vee \varphi)$	k, $\vee$E

5. Disjunktionsbeseitigung ($\vee$B)

$k.\ (k_1 \dots k_r)$	$(\varphi \vee \psi)$	
$l.\ (l_1 \dots l_s)$	$(\varphi \rightarrow \chi)$	
$m.\ (m_1 \dots m_t)$	$(\psi \rightarrow \chi)$	
$n.\ (k_1 \dots k_r, l_1 \dots l_s, m_1 \dots m_t)$	χ	k, l, m, $\vee$B

6. Subjunktionseinführung* ($\rightarrow$E)

$k.\ (k)$	φ	AE
$m.\ (k, m_1 \dots m_r)$	ψ	
$n.\ (m_1 \dots m_r)$	$(\varphi \rightarrow \psi)$	k, m, $\rightarrow$E

7. Subjunktionsbeseitigung ($\rightarrow$B)

$k.\ (k_1 \dots k_r)$	$(\varphi \rightarrow \psi)$	
$m.\ (m_1 \dots m_s)$	φ	
$n.\ (k_1 \dots k_r, m_1 \dots m_s)$	ψ	k, m, $\rightarrow$B

8. Bisubjunktionseinführung ($\leftrightarrow$E)

$k.\ (k_1 \dots k_r)$	$(\varphi \rightarrow \psi)$	
$m.\ (m_1 \dots m_s)$	$(\psi \rightarrow \varphi)$	
$n.\ (k_1 \dots k_r, m_1 \dots m_s)$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	k, m, $\leftrightarrow$E

9. Bisubjunktionsbeseitigung ($\leftrightarrow$B)

$k.\ (k_1 \ldots k_r)$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	
$n.\ (k_1 \ldots k_r)$	$(\varphi \rightarrow \psi)$	k, $\leftrightarrow$B

oder

$k.\ (k_1 \ldots k_r)$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	
$n.\ (k_1 \ldots k_r)$	$(\psi \rightarrow \varphi)$	k, $\leftrightarrow$B

10. Negationseinführung* ($\neg$E)

$k.\ (k)$	φ	AE
$m.\ (k, m_1 \ldots m_r)$	$(\psi \wedge \neg\psi)$	
$n.\ (m_1 \ldots m_r)$	$\neg\varphi$	k, m, $\neg$E

11. Negationsbeseitigung ($\neg$B)

$k.\ (k_1 \ldots k_r)$	$\neg\neg\varphi$	
$n.\ (k_1 \ldots k_r)$	φ	k, $\neg$B

Vgl. Wilhelm K. Essler: *Einführung in die Logik*, Stuttgart 1966 (Kröners Taschenausgabe 381), S. 38–48.

Beweisstrategien

Wenn Sie eine Formel der gegebenen Form beweisen müssen, gehen Sie am Besten wie angegeben vor.

- $\neg\varphi$
  Nehmen Sie φ an (durch Regel AE) und arbeiten Sie sich zu einem Widerspruch vor. Eliminieren Sie dann die Annahme φ, indem Sie mit Regel $\neg$E die Formel $\neg\varphi$ einführen.
- $(\varphi \wedge \psi)$
  Beweisen Sie die beiden Konjunktionsglieder φ und ψ einzeln, und führen Sie dann die Konjunktion $(\varphi \wedge \psi)$ mit $\wedge$E ein.
- $(\varphi \vee \psi)$
  Wenn Sie eines der Disjunktionsglieder φ oder ψ bereits haben, dann führen Sie die Disjunktion durch $\vee$E ein. Wenn Sie keines der beiden Disjunktionsglieder haben und Sie auch keinen Weg sehen, um eines zu beweisen, dann versuchen Sie von einer anderen Disjunktion $(\chi \vee \theta)$ mit Hilfe zweier Subjunktionen $(\chi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$ und $(\theta \rightarrow (\varphi \vee \psi))$ die Disjunktion $(\varphi \vee \psi)$ durch $\vee$B einzuführen. Wenn auch das nicht möglich ist, versuchen Sie es mit der Annahme $\neg(\varphi \vee \psi)$, führen Sie diese auf einen Widerspruch zurück, und Sie gelangen durch $\neg$E zu der Formel $\neg\neg(\varphi \vee \psi)$. Beseitigen Sie dann die doppelte Negation mit $\neg$B.
- $(\varphi \rightarrow \psi)$
  Nehmen Sie das Vorderglied φ per Annahmeeinführung an und arbeiten Sie sich zum Nachglied ψ vor. Eliminieren Sie dann die Annahme φ durch $\rightarrow$E.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$
  Beweisen Sie die beiden Subjunktionen $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\psi \rightarrow \varphi)$ einzeln und führen Sie dann aus diesen beiden die Bisubjunktion per $\leftrightarrow$E ein.

Vgl. John Nolt, *Logics*, Belmont (CA) u.a. 1997, S. 99.