Übung zur Elementaren Logik II
Michael Matzer

# Syntaktik: Der Satzvorrat der Prädikatenlogik

## 1 Zeichenvorrat

1. Außerlogische Konstanten
   (a) Individuenkonstanten: $a$, $b$, $c$, $d$, $\ldots$, $a_1$, $b_1$, $c_1$, $\ldots$
   (b) $n$-stellige Prädikate für $n \in \mathbb{N}^+$
      - Einstellige Prädikate ($n = 1$): $F$, $G$, $H$, $\ldots$
      - Mehrstellige Prädikate ($n > 1$): $R$, $\ldots$
2. Logische Konstanten
   (a) 5 Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
   (b) 2 Quantoren: $\forall$, $\exists$
3. (Individuen-)Variablen: $x$, $y$, $z$, $x_1$, $y_1$, $z_1$, $\ldots$
4. 2 Gliederungszeichen: (, )

**Definition** ((Singulärer) Term).
Ein *(singulärer) Term* ist eine Individuenkonstante oder eine Variable.

## 2 Formeln der Prädikatenlogik

**Definition** (Formel der Prädikatenlogik).

1. Atomare Formeln:
   (a) Jedes $n$-stellige Prädikat gefolgt von $n$-vielen geklammerten, durch Kommata separierten Termen ($n \in \mathbb{N}^+$) ist eine Formel.
2. Molekulare Formeln:
   (a) Wenn $A$ eine Formel ist, dann ist auch eine Formel:
      - $\neg A$ (Negationsformel).
   (b) Wenn $A$ und $B$ Formeln sind, dann sind auch Formeln:
      - $(A \wedge B)$ (Konjunktionsformel),
      - $(A \vee B)$ (Disjunktionsformel),
      - $(A \rightarrow B)$ (Implikationsformel), sowie
      - $(A \leftrightarrow B)$ (Äquivalenzformel).
3. Quantifikationen:
   Wenn $A$ ein Formel und $v$ eine Variable ist, dann sind auch Formeln:
   - $\forall v A$ (Allformel), und
   - $\exists v A$ (Existenzformel).
4. Sonst ist nichts eine Formel.

## 3 Freie und gebundene Vorkommnisse von Variablen in Formeln

**Definition** (Quantorausdruck).
Ein *Quantorausdruck* ist eine Zeichenreihe der Länge 2, an deren erster Stelle ein Quantor, und an deren zweiter Stelle eine Variable vorkommt.

**Definition** (Bereich eines Quantorausdrucks).
Der *Bereich* (mit einem Fremdwort: *Scopus*) eines Quantorausdrucks in einer Formel $A$ ist die kürzeste auf den Quantorausdruck folgende Teilformel von $A$.

**Definition** (Gleichnamigkeit eines Quantorausdrucks mit einer Variablen).
Für alle Variablen $v$ gilt: Die beiden Quantorausdrücke $\forall v$ und $\exists v$ sind *gleichnamig mit* $v$, und gleichnamig mit keiner anderen Variablen.

**Definition** (Gebundenes Vorkommnis einer Variablen in einer Formel).
Für alle Formeln $A$ und für alle Variablen $v$ gilt: $v$ kommt in $A$ an der Stelle $S$ *gebunden* vor gdw.

1. $v$ kommt in $A$ an $S$ vor, und
2. $S$ liegt in $A$ im Bereich eines mit $v$ gleichnamigen Quantorausdrucks.

**Definition** (Freies Vorkommnis einer Variablen in einer Formel).
Für alle Formeln $A$ und für alle Variablen $v$ gilt: $v$ kommt in $A$ an der Stelle $S$ *frei* vor gdw.

1. $v$ kommt in $A$ an $S$ vor, und
2. $v$ kommt in $A$ an $S$ nicht gebunden vor.

**Korollar.**
Für alle Formeln $A$ und für alle Variablen $v$ gilt: $v$ kommt in $A$ an der Stelle $S$ frei vor gdw.

1. $v$ kommt in $A$ an $S$ vor, und
2. $S$ liegt in $A$ nicht im Bereich eines mit $v$ gleichnamigen Quantorausdrucks.

Dann brauchen wir noch folgende

**Konvention.**
Jedes Vorkommnis jeder Variablen in einem Quantorausdruck ist stets *gebunden*.

**Beispiel.**
Gegenstand dieses Beispiels sei die Formel ‚$(\forall x \forall y R(x, y) \rightarrow \exists y(F(y) \vee S(x, y, z)))$'.

- Der Bereich des Allquantorausdrucks ‚$\forall x$' ist die Formel ‚$\forall y R(x, y)$'.
- Der Bereich des Allquantorausdrucks ‚$\forall y$' ist die Formel ‚$R(x, y)$'.
- Der Bereich des Existenzquantorausdrucks ‚$\exists y$' ist die Formel ‚$(F(y) \vee S(x, y, z))$'.
- Das Vorkommnis von ‚$x$' in ‚$R(x, y)$' ist *gebunden*.
- Das Vorkommnis von ‚$x$' in ‚$S(x, y, z)$' ist *frei*.
- Alle Vorkommnisse von ‚$y$' in der Formel sind *gebunden*.
- Das einzige Vorkommnis von ‚$z$' in der Formel ist *frei*.

# 4 Sätze der Prädikatenlogik

**Definition** (Offene Formel).
Für alle Formeln $A$ gilt: $A$ ist eine *offene Formel* (manchmal auch: ein *offener Satz*) gdw. in $A$ mindestens eine Variable frei vorkommt.

**Definition** (Geschlossene Formel, Satz).
Für alle Formeln $A$ gilt: $A$ ist eine *geschlossene Formel / ein (geschlossener) Satz* gdw. in $A$ keine Variable frei vorkommt.

**Korollar.**
Für alle Formeln $A$ gilt: $A$ ist eine geschlossene Formel / ein Satz gdw. in $A$ entweder überhaupt keine Variable vorkommt, oder wenn in $A$ jedes Vorkommnis jeder Variablen gebunden ist.

**Korollar.**
Jeder Satz ist eine Formel, aber nicht jede Formel ist ein Satz.

**Beispiel.**
Die Formel ‚$\neg(\forall x F(x) \vee \neg R(x, y, a))$' ist eine *offene Formel*: In ihr kommen zwei Variablen frei vor. (Das letzte Vorkommnis von ‚$x$' und das einzige Vorkommnis von ‚$y$' sind frei.)

**Beispiel.**
Die Formel ‚$\neg\forall x(F(x) \vee \exists y \neg R(x, y, a))$' ist eine *geschlossene Formel / ein Satz*: In ihr kommen zwar Variablen vor, aber jedes Vorkommnis jeder Variablen ist gebunden.

# 5 Literatur


Leitgeb, Hannes: *Logik I. Eine Einführung in die klassische Aussagen- und Prädikatenlogik*, online verfügbar unter: `http://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/students/course_material/script.pdf`, Zugriff am 11.5.2014.

Kamitz, Reinhard: *Logik — Faszination der Klarheit. Eine Einführung für Philosophinnen und Philosophen mit zahlreichen Anwendungsbeispielen*, 2 Bde., Wien u.a.: LIT Verlag 2007 (Einführungen Philosophie 11f.).