Gesetze der Prädikatenlogik: Folgerungsbeziehungen und Äquivalenzen

(in Anlehnung an ein Merkblatt von Univ.-Prof. Dr. R. Kamitz)

1 Abschwächung zur Existenzquantifikation

Für alle Variablen v und alle Formeln A gilt:

1. $\forall vA \models \exists vA$

2 Quantorennegation

Für alle Variablen v und alle Formeln A gilt:

1. $\neg\forall vA$ ist äquivalent mit $\exists v\neg A$.
2. $\neg\exists vA$ ist äquivalent mit $\forall v\neg A$.
3. $\neg\forall v\neg A$ ist äquivalent mit $\exists vA$.
4. $\neg\exists v\neg A$ ist äquivalent mit $\forall vA$.

3 Quantorentauschgesetze

Für alle Variablen v und w und alle Formeln A gilt:

1. $\forall v\forall wA$ ist äquivalent mit $\forall w\forall vA$.
2. $\exists v\exists wA$ ist äquivalent mit $\exists w\exists vA$.
3. $\exists v\forall wA \models \forall w\exists vA$

4 Quantorendistribution

Für alle Variablen v und alle Formeln A und B gilt:

1. $\forall v(A \wedge B)$ ist äquivalent mit $(\forall vA \wedge \forall vB)$.
2. $\exists v(A \wedge B) \models (\exists vA \wedge \exists vB)$.
3. $(\forall vA \vee \forall vB) \models \forall v(A \vee B)$.
4. $\exists v(A \vee B)$ ist äquivalent mit $(\exists vA \vee \exists vB)$.
5. $\forall v(A \to B) \models (\forall vA \to \forall vB)$
6. $\forall v(A \to B) \models (\exists vA \to \exists vB)$

5 Quantorenverschiebung

Für alle Variablen v und alle Formeln A und B, wobei v in B nicht frei vorkommt, gilt:

1. $\forall v(A \wedge B)$ ist äquivalent mit $(\forall vA \wedge B)$.
2. $\forall v(B \wedge A)$ ist äquivalent mit $(B \wedge \forall vA)$.
3. $\exists v(A \wedge B)$ ist äquivalent mit $(\exists vA \wedge B)$.
4. $\exists v(B \wedge A)$ ist äquivalent mit $(B \wedge \exists vA)$.
5. $\forall v(A \vee B)$ ist äquivalent mit $(\forall vA \vee B)$.
6. $\forall v(B \vee A)$ ist äquivalent mit $(B \vee \forall vA)$.
7. $\exists v(A \vee B)$ ist äquivalent mit $(\exists vA \vee B)$.
8. $\exists v(B \vee A)$ ist äquivalent mit $(B \vee \exists vA)$.
9. $\forall v(A \to B)$ ist äquivalent mit $(\exists vA \to B)$.
10. $\exists v(A \to B)$ ist äquivalent mit $(\forall vA \to B)$.
11. $\forall v(B \to A)$ ist äquivalent mit $(B \to \forall vA)$.
12. $\exists v(B \to A)$ ist äquivalent mit $(B \to \exists vA)$.

Für alle Variablen v und alle Formeln A und B, wobei B geschlossen ist, gilt:

1. $\forall v(A \leftrightarrow B) \models (\forall vA \leftrightarrow B)$
2. $\forall v(B \leftrightarrow A) \models (B \leftrightarrow \forall vA)$
3. $\forall v(A \leftrightarrow B) \models (\exists vA \leftrightarrow B)$
4. $\forall v(B \leftrightarrow A) \models (B \leftrightarrow \exists vA)$
5. $(\forall vA \leftrightarrow B) \models \exists v(A \leftrightarrow B)$
6. $(B \leftrightarrow \forall vA) \models \exists v(B \leftrightarrow A)$
7. $(\exists vA \leftrightarrow B) \models \exists v(A \leftrightarrow B)$
8. $(B \leftrightarrow \exists vA) \models \exists v(B \leftrightarrow A)$