Übung zur Elementaren Logik I
Michael Matzer

Der aussagenlogische Kalkül des natürlichen Schließens

(nach einem Skriptum von Prof. Hannes Leitgeb)

1. Regeln zur Negationseinführung:
   - Doppelte Negation 1:

     $k.\ A$
     $n.\ \neg\neg A$ $\qquad k.$, (DN1)
   - U.U. auch Indirekter Beweis (in einem Spezialfall):

     $k.\ |\ \neg\neg A$ $\qquad$ (IB-Annahme)
     $|\ \vdots$
     $m.\ |\ (B \wedge \neg B)$
     $n.\ \neg A$ $\qquad k.$–$m.$, (IB)
2. Regeln zur Negationsbeseitigung:
   - Doppelte Negation 2:

     $k.\ \neg\neg A$
     $n.\ A$ $\qquad k.$, (DN2)
3. Regeln zur Konjunktionseinführung:
   - (Konjunktion):

     $k.\ A$
     $l.\ B$
     $n.\ (A \wedge B)$ $\qquad k., l.$, (KON)
4. Regeln zur Konjunktionsbeseitigung:
   - Simplifikation 1:

     $k.\ (A \wedge B)$
     $n.\ A$ $\qquad k.$, (SIMP1)
   - Simplifikation 2:

     $k.\ (A \wedge B)$
     $n.\ B$ $\qquad k.$, (SIMP2)
5. Regeln zur Disjunktionseinführung:
   - Addition 1:

     $k.\ A$
     $n.\ (A \vee B)$ $\qquad k.$, (ADD1)
   - Addition 2:

     $k.\ A$
     $n.\ (B \vee A)$ $\qquad k.$, (ADD2)
   - Disjunktion:

     $k.\ (A \to C)$
     $l.\ (B \to C)$
     $n.\ ((A \vee B) \to C)$ $\qquad k., l.$, (DIS)
6. Regeln zur Disjunktionsbeseitigung:

- <u>Disjunktiver Syllogismus 1:</u>

  $k.$ $(A \vee B)$
  $l.$ $\neg A$
  $n.$ B — $k.$, $l.$, (DS1)

- <u>Disjunktiver Syllogismus 2:</u>

  $k.$ $(A \vee B)$
  $l.$ $\neg B$
  $n.$ A — $k.$, $l.$, (DS2)

7. Regeln zur Implikationseinführung:

- <u>Konditionaler Beweis:</u>

  $k.$ | A — (KB-Annahme)
  | $\vdots$
  $m.$ | B
  $n.$ $(A \to B)$ — $k.$–$m.$, (KB)

8. Regeln zur Implikationsbeseitigung:

- <u>Modus Ponens:</u>

  $k.$ A
  $l.$ $(A \to B)$
  $n.$ B — $k.$, $l.$, (MP)

- <u>Modus Tollens:</u>

  $k.$ $(A \to B)$
  $l.$ $\neg B$
  $n.$ $\neg A$ — $k.$, $l.$, (MT)

9. Regeln zur Äquivalenzeinführung:

- <u>Einführung der Äquivalenz:</u>

  $k.$ $(A \to B)$
  $l.$ $(B \to A)$
  $n.$ $(A \leftrightarrow B)$ — k,. $l.$, (ÄQ-EIN)

10. Regeln zur Äquivalenzbeseitigung:

- <u>Elimination der Äquivalenz 1:</u>

  $k.$ $(A \leftrightarrow B)$
  $n.$ $(A \to B)$ — $k.$, (ÄQ-ELIM1)

- <u>Elimination der Äquivalenz 2:</u>

  $k.$ $(A \leftrightarrow B)$
  $n.$ $(B \to A)$ — $k.$, (ÄQ-ELIM2)

11. Sonstige Schlussregeln:

- <u>Triviale Schlussform:</u>

  $k.$ A
  $n.$ A — $k.$, (TS)

- <u>Ex Contradictione Quodlibet:</u>

  $k.$ A
  $l.$ $\neg A$
  $n.$ B — $k.$, $l.$, (ECQ)

- <u>Indirekter Beweis (allgemein):</u>

  $k.$ | $\neg A$ (IB-Annahme)
  | $\vdots$
  $m.$ | $(B \wedge \neg B)$
  $n.$ A $k.$–$m.$, (IB)

- <u>Vollständige Fallunterscheidung:</u>

  $i.$ | A (FU-Annahme 1)
  | $\vdots$
  $k.$ | B
  $l.$ | $\neg A$ (FU-Annahme 2)
  | $\vdots$
  $m.$ | B
  $n.$ B $i.$–$m.$, (FU)

Vgl. Hannes Leigeb, *Logik I*, S. 143f., online verfügbar unter:
`http://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/students/course_material/script.pdf`, Zugriff am 11.5.2014.

Beweisstrategien

Wenn Sie eine Formel der gegebenen Form beweisen müssen, gehen Sie am Besten wie angegeben vor.

- $\neg A$
  Wenn Sie keinen direkten Weg sehen, um $\neg A$ zu beweisen, dann nehmen Sie $\neg\neg A$ an (als IB-Annahme) und arbeiten Sie sich zu einem Widerspruch vor. Eliminieren Sie dann die Annahme $\neg\neg A$, indem Sie mit Regel (IB) die Formel $\neg A$ einführen.

- $(A \wedge B)$
  Beweisen Sie die beiden Konjunktionsglieder A und B einzeln, und führen Sie dann die Konjunktionsformel $(A \wedge B)$ mit (KON) ein.

- $(A \vee B)$
  Wenn Sie eines der Disjunktionsglieder A oder B bereits haben, dann führen Sie die Disjunktion durch (ADD1) bzw. (ADD2) ein. Wenn Sie keines der beiden Disjunktionsglieder haben und Sie auch keinen Weg sehen, um eines zu beweisen, dann versuchen Sie eine vollständige Fallunterscheidung: Leiten Sie $(A \vee B)$ einmal durch Addition aus A ab, und einmal durch Addition aus B (vgl. Leitgeb, *Logik I*, S. 145). Wenn auch das nicht möglich ist, versuchen Sie es mit der Annahme $\neg(A \vee B)$ als IB-Annahme, führen Sie diese auf einen Widerspruch zurück, und Sie gelangen durch (IB) zu der Formel $(A \vee B)$.

- $(A \rightarrow B)$
  Nehmen Sie das Vorderglied A als KB-Annahme an und arbeiten Sie sich zum Nachglied B vor. Eliminieren Sie dann die Annahme A durch (KB).

- $(A \leftrightarrow B)$
  Beweisen Sie die beiden Implikationsformeln $(A \rightarrow B)$ und $(B \rightarrow A)$ einzeln und führen Sie dann aus diesen beiden die Äquivalenzformel per (ÄQ-EIN) ein.

Vgl. John Nolt, *Logics*, Belmont (CA) u.a. 1997, S. 99.

Der prädikatenlogische Kalkül des natürlichen Schließens

(nach einem Skriptum von Prof. Hannes Leitgeb)

1. Regeln zur Allquantorbeseitigung:
   - Universelle Beseitigung:

     $k.\ \forall vA$
     $n.\ A[t/v]$ $\qquad$ $k.$, (UB)

2. Regeln zur Existenzquantoreinführung:
   - Existenzielle Einführung:

     $k.\ A[t/v]$
     $n.\ \exists vA$ $\qquad$ $k.$, (EE)

3. Regeln zur Allquantoreinführung:
   - Universelle Einführung:

     $k.\ A[t/v]$
     $n.\ \forall vA$ $\qquad$ $k.$, (UE)

     Achtung: t darf nicht in den Zeilen (frei, sofern es eine Variable ist) vorkommen, von denen Zeile n abhängt,[1] und t darf nicht in A (frei) vorkommen.

4. Regeln zur Existenzquantorbeseitigung:
   - Existenzielle Beseitigung:

     $k.\ \exists vA$
     $l.\ |\ A[t/v]$ $\qquad$ (EB-Annahme)
     $\ \ |\ \vdots$
     $m.\ |\ B$
     $n.\ B$ $\qquad$ $l.–m.$, (EB)

     Achtung: t darf nicht in den Zeilen (frei, sofern es eine Variable ist) vorkommen, von denen Zeile n abhängt, und t darf weder in A noch in B (frei) vorkommen.

Achtung: Bei allen Regelanwendungen muss t frei sein zum Einsetzen für v in A.

Vgl. Hannes Leigeb, *Logik I*, S. 243, 193, online verfügbar unter:
`http://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/students/course_material/script.pdf`, Zugriff am 11.5.2014.

[1] d.s. alle Prämissen (so welche vorhanden sind), und Zusatzannahmen für (KB), (IB), (FU) und (EB), die in Zeile n noch nicht abgeschlossen sind

Der prädikatenlogische Kalkül des natürlichen Schließens mit Identität

(nach einem Skriptum von Prof. Hannes Leitgeb)

1. Reflexivität:

   $n. \; \forall v \, v = v$ (REF)

2. Substitution:

   $n. \; \forall v_1 \forall v_2((v_1 = v_2 \wedge A[v_1/v_3]) \rightarrow A[v_2/v_3])$ (SUB)

Vgl. Hannes Leigeb, *Logik I*, S. 255, online verfügbar unter:
`http://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/students/course_material/script.pdf`, Zugriff am 11.5.2014.