Materialien zur Elementaren Logik
Michael Matzer

Diese Unterlagen sind zum Trainieren da und *keine* Übungseinheiten für die Übung zur Elementaren Logik, d.h. es brauchen *keine* Lösungen abgegeben zu werden.
(Version vom 25.01.2024, 08:39)

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

1.1 Kommutativität der Konjunktion (1)

$(p \land q) \vdash (q \land p)$

1. $(p \land q)$	(P1)
2. q	1., (SIMP2)
3. p	1., (SIMP1)
4. $(q \land p)$	2., 3., (KON)

1.2 Kommutativität der Konjunktion (2)

$(p \land q) \vdash (q \land p)$

1. $(p \land q)$	(P1)
2. p	1., (SIMP1)
3. q	1., (SIMP2)
4. $(q \land p)$	3., 2., (KON)

Anmerkung: Diese Ableitung unterscheidet sich von der obigen Nr. (1.1) durch die Reihenfolge der Anwendungen der beiden Regeln (SIMP1) und (SIMP2) sowie, daraus sich ergebend, die Reihenfolge der Zeilen bei der Konjunktionseinführung in Zeile (4).

1.3 Assoziativität der Konjunktion (1)

$((p \wedge q) \wedge r) \vdash (p \wedge (q \wedge r))$

1. $((p \wedge q) \wedge r)$	(P1)
2. $(p \wedge q)$	1., (SIMP1)
3. p	2., (SIMP1)
4. q	2., (SIMP2)
5. r	1., (SIMP2)
6. $(q \wedge r)$	4., 5., (KON)
7. $(p \wedge (q \wedge r))$	3., 6., (KON)

1.4 Assoziativität der Konjunktion (2)

$(p \wedge (q \wedge r)) \vdash ((p \wedge q) \wedge r)$

1. $(p \wedge (q \wedge r))$	(P1)
2. p	1., (SIMP1)
3. $(q \wedge r)$	1., (SIMP2)
4. q	3., (SIMP1)
5. $(p \wedge q)$	2., 4., (KON)
6. r	3., (SIMP2)
7. $((p \wedge q) \wedge r)$	5., 6., (KON)

Anmerkung: Beispiele (1.3) und (1.4) zusammen zeigen, dass die Assoziativität der Konjunktion eine Äquivalenz ist.

1.5 Übungsbeispiel

$(\neg p \to q), \neg p, ((\neg\neg q \vee r) \to (\neg s \wedge t)) \vdash t$

1.	$(\neg p \to q)$	(P1)
2.	$\neg p$	(P2)
3.	$((\neg\neg q \vee r) \to (\neg s \wedge t))$	(P3)
4.	q	2., 1., (MP)
5.	$\neg\neg q$	4., (DN1)
6.	$(\neg\neg q \vee r)$	5., (ADD1)
7.	$(\neg s \wedge t)$	6., 3., (MP)
8.	t	7., (SIMP2)

1.6 Konjunktiver Syllogismus

$\neg(p \wedge q), q \vdash \neg p$

1.	$\neg(p \wedge q)$	(P1)
2.	q	(P2)
3.	$\neg\neg p$	(IB-Annahme)
4.	p	3., (DN2)
5.	$(p \wedge q)$	4., 2., (KON)
6.	$((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))$	5., 1., (KON)
7.	$\neg p$	3.–6., (IB)

1.7 Von der Konjunktion zur negierten Implikationsformel (1)

$(p \wedge q) \vdash \neg(p \rightarrow \neg q)$

1.	$(p \wedge q)$	(P1)
2.	$\mid \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$	(IB-Annahme)
3.	$\mid (p \rightarrow \neg q)$	2., (DN2)
4.	$\mid p$	1., (SIMP1)
5.	$\mid q$	1., (SIMP2)
6.	$\mid \neg q$	4., 3., (MP)
7.	$\mid (q \wedge \neg q)$	5., 6., (KON)
8.	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	2.–7., (IB)

1.8 Von der Konjunktion zur negierten Implikationsformel (2)

$(p \wedge q) \vdash \neg(p \rightarrow \neg q)$

1.	$(p \wedge q)$	(P1)
2.	p	1., (SIMP1)
3.	q	1., (SIMP2)
4.	$\mid \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$	(IB-Annahme)
5.	$\mid (p \rightarrow \neg q)$	4., (DN2)
6.	$\mid \neg q$	2., 5., (MP)
7.	$\mid (q \wedge \neg q)$	3., 6., (KON)
8.	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	4.–7., (IB)

Anmerkung: Diese Ableitung unterscheidet sich von der vorigen (1.7) durch den Zeitpunkt der Anwendungen der Regeln (SIMP1) und (SIMP2): Während Nr. (1.7) strikt strategisch zuerst den indirekten Beweis beginnt, erfolgt bei Nr. (1.8) zuerst die Auswertung der ersten und einzigen Prämisse.

1.9 Kontraposition (1)

$(p \to q) \vdash (\neg q \to \neg p)$

1.	$(p \to q)$	(P1)
2.	$\mid\ \neg q$	(KB-Annahme)
3.	$\mid\ \neg p$	1., 2., (MT)
4.	$(\neg q \to \neg p)$	2.–3., (KB)

1.10 Kontraposition (2)

$(\neg q \to \neg p) \vdash (p \to q)$

1.	$(\neg q \to \neg p)$	(P1)
2.	$\mid\ p$	(KB-Annahme)
3.	$\mid\ \neg\neg p$	2., (DN1)
4.	$\mid\ \neg\neg q$	1., 3., (MT)
5.	$\mid\ q$	4., (DN2)
6.	$(p \to q)$	2.–5., (KB)

Anmerkung: Beispiele Nr. (1.9) und (1.10) zusammen zeigen, dass die Kontraposition eine Äquivalenz ist.

1.11 Kettenschluss (hypothetischer Syllogismus)

$(p \to q), (q \to r) \vdash (p \to r)$

1.	$(p \to q)$	(P1)
2.	$(q \to r)$	(P2)
3.	$\mid\ p$	(KB-Annahme)
4.	$\mid\ q$	3., 1., (MP)
5.	$\mid\ r$	4., 2., (MP)
6.	$(p \to r)$	3.–5., (KB)

1.12 Kettenschluss mit Kontraposition

$(p \to q), (q \to r) \vdash (\neg r \to \neg p)$

1.	$(p \to q)$	(P1)
2.	$(q \to r)$	(P2)
3.	$\mid \neg r$	(KB-Annahme)
4.	$\mid \neg q$	2., 3., (MT)
5.	$\mid \neg p$	1., 4., (MT)
6.	$(\neg r \to \neg p)$	3.–5., (KB)

1.13 Importation ...

$(p \to (q \to r)) \vdash ((p \wedge q) \to r)$

1.	$(p \to (q \to r))$	(P1)
2.	$\mid (p \wedge q)$	(KB-Annahme)
3.	$\mid p$	2., (SIMP1)
4.	$\mid q$	2., (SIMP2)
5.	$\mid (q \to r)$	3., 1., (MP)
6.	$\mid r$	4., 5., (MP)
7.	$((p \wedge q) \to r)$	2.–7., (KB)

1.14 ... und Exportation

$((p \wedge q) \to r) \vdash (p \to (q \to r))$

1.	$((p \wedge q) \to r)$	(P1)
2.	$\mid p$	(KB-Annahme)
3.	$\mid \mid q$	(KB-Annahme)
4.	$\mid \mid (p \wedge q)$	2., 3., (KON)
5.	$\mid \mid r$	4., 1., (MP)
6.	$\mid (q \to r)$	3.–5., (KB)
7.	$(p \to (q \to r))$	2.–6., (KB)

Anmerkung: Importation / Exportation ist eine Äquivalenz.

1.15 Implikation des Gegenteils (1)

$(p \to \neg p) \vdash \neg p$

1.	$(p \to \neg p)$	(P1)
2.	$\neg\neg p$	(IB-Annahme)
3.	p	2., (DN2)
4.	$\neg p$	3., 1., (MP)
5.	$(p \wedge \neg p)$	3., 4., (KON)
6.	$\neg p$	2.–5., (IB)

1.16 Implikation des Gegenteils (2)

$\neg p \vdash (p \to \neg p)$

1.	$\neg p$	(P1)
2.	p	(KB-Annahme)
3.	$\neg p$	1., (TS)
4.	$(p \to \neg p)$	2.–3., (KB)

Anmerkung: Beispiele (1.15) und (1.16) zusammen zeigen, dass ‚$(p \to \neg p)$' äquivalent ist mit ‚$\neg p$' (und nicht etwa eine Kontradiktion, wie man zunächst vielleicht meinen möchte).

1.17 Definition der Implikationsformel (1)

$(\neg p \vee q) \vdash (p \to q)$

1.	$(\neg p \vee q)$	(P1)
2.	p	(KB-Annahme)
3.	$\neg\neg p$	2., (DN1)
4.	q	1., 3., (DS1)
5.	$(p \to q)$	2.–4., (KB)

1.18 Definition der Implikationsformel (2)

$(p \to q) \vdash (\neg p \lor q)$

1.	$(p \to q)$	(P1)
2.	$\mid p$	(FU-Annahme 1)
3.	$\mid q$	2., 1., (MP)
4.	$\mid (\neg p \lor q)$	3., (ADD2)
5.	$\mid \neg p$	(FU-Annahme 2)
6.	$\mid (\neg p \lor q)$	5., (ADD1)
7.	$(\neg p \lor q)$	2.–6., (FU)

Anmerkung: Beispiele (1.17) und (1.18) zusammen zeigen eine weitere wichtige Äquivalenz.

1.19 Definition der Implikationsformel (3)

$\neg(p \land \neg q) \vdash (p \to q)$

1.	$\neg(p \land \neg q)$	(P1)
2.	$\mid p$	(KB-Annahme)
3.	$\mid \mid \neg q$	(IB-Annahme)
4.	$\mid \mid (p \land \neg q)$	2., 3., (KON)
5.	$\mid \mid ((p \land \neg q) \land \neg(p \land \neg q))$	4., 1., (KON)
6.	$\mid q$	3.–5., (IB)
7.	$(p \to q)$	2.–6., (KB)

1.20 Definition der Implikationsformel (4)

$$(p \to q) \vdash \neg(p \land \neg q)$$

1.	$(p \to q)$	(P1)
2.	$\neg\neg(p \land \neg q)$	(IB-Annahme)
3.	$(p \land \neg q)$	2., (DN2)
4.	p	3., (SIMP1)
5.	$\neg q$	3., (SIMP2)
6.	q	4., 1., (MP)
7.	$(q \land \neg q)$	6., 5., (KON)
8.	$\neg(p \land \neg q)$	2.–7., (IB)

Anmerkung: Beispiele (1.19) und (1.20) zusammen zeigen eine weitere wichtige Äquivalenz.

1.21 Kommutativität der Disjunktion (1)

$$(p \lor q) \vdash (q \lor p)$$

In dieser Fassung der Sammlung wird diese Ableitung nicht dargestellt, da sie in einer Übungseinheit enthalten ist.

1.22 Kommutativität der Disjunktion (2)

$$(p \lor q) \vdash (q \lor p)$$

In dieser Fassung der Sammlung wird diese Ableitung nicht dargestellt, da sie in einer Übungseinheit enthalten ist.

1.23 Kommutativität der Disjunktion (3)

$$(p \lor q) \vdash (q \lor p)$$

In dieser Fassung der Sammlung wird diese Ableitung nicht dargestellt, da sie in einer Übungseinheit enthalten ist.

1.24 Kommutativität der Disjunktion (4)

$(p \vee q) \vdash (q \vee p)$

In dieser Fassung der Sammlung wird diese Ableitung nicht dargestellt, da sie in einer Übungseinheit enthalten ist.

1.25 Disjunktion impliziert Konjunktion ist Äquivalenz

$((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)) \vdash (p \leftrightarrow q)$

1.	$((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$	(P1)
2.	$\mid p$	(KB-Annahme)
3.	$\mid (p \vee q)$	2., (ADD1)
4.	$\mid (p \wedge q)$	3., 1., (MP)
5.	$\mid q$	4., (SIMP2)
6.	$(p \rightarrow q)$	2.–5., (KB)
7.	$\mid q$	(KB-Annahme)
8.	$\mid (p \vee q)$	7., (ADD2)
9.	$\mid (p \wedge q)$	8., 1., (MP)
10.	$\mid p$	9., (SIMP1)
11.	$(q \rightarrow p)$	7.–10., (KB)
12.	$(p \leftrightarrow q)$	6., 11., (ÄQ-EIN)

Vgl. Alastair Carr, *The Natural Deduction Pack*, Abschn. 4.4, Nr. 14.

1.26 ... und umgekehrt

$$(p \leftrightarrow q) \vdash ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$$

1.	$(p \leftrightarrow q)$	(P1)
2.	$(p \rightarrow q)$	1., (ÄQ-ELIM1)
3.	$(q \rightarrow p)$	1., (ÄQ-ELIM2)
4.	$(p \vee q)$	(KB-Annahme)
5.	p	(FU-Annahme 1)
6.	p	5., (TS)
7.	$\neg p$	(FU-Annahme 2)
8.	q	4., 7., (DS1)
9.	p	8., 3., (MP)
10.	p	5.–9., (FU)
11.	q	(FU-Annahme 1)
12.	q	11., (TS)
13.	$\neg q$	(FU-Annahme 2)
14.	p	4., 13., (DS2)
15.	q	14., 2., (MP)
16.	q	11.–15., (FU)
17.	$(p \wedge q)$	10., 16., (KON)
18.	$((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$	4.–17., (KB)

Vgl. Alastair Carr, *The Natural Deduction Pack*, Abschn. 4.4, Nr. 13.

Anmerkung: Beispiele (1.25) und (1.26) zusammen zeigen, dass ‚$((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$' und ‚$(p \leftrightarrow q)$' äquivalent sind.

1.27 Axiom der Konditionalisierung

$$\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow p))$$

In dieser Fassung der Sammlung wird diese Ableitung nicht dargestellt, da sie in einer Übungseinheit enthalten ist.

1.28 Gesetz des Duns Scotus

$\vdash (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$

1.	$\neg p$	(KB-Annahme)
2.	p	(KB-Annahme)
3.	q	2., 1., (ECQ)
4.	$(p \rightarrow q)$	2.–3., (KB)
5.	$(\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$	1.–4., (KB)

1.29 Beweis der Regel (DIS)

$(p \rightarrow r), (q \rightarrow r) \vdash ((p \vee q) \rightarrow r)$

1.	$(p \rightarrow r)$	(P1)
2.	$(q \rightarrow r)$	(P2)
3.	$(p \vee q)$	(KB-Annahme)
4.	p	(FU-Annahme 1)
5.	r	4., 1., (MP)
6.	$\neg p$	(FU-Annahme 2)
7.	q	3., 6., (DS1)
8.	r	7., 2., (MP)
9.	r	4.–8., (FU)
10.	$((p \vee q) \rightarrow r)$	3.–9., (KB)

1.30 Regel (DIS) ist auch umgekehrt gültig (also eine Äquivalenz)

$((p \lor q) \to r) \vdash ((p \to r) \land (q \to r))$

1.	$((p \lor q) \to r)$	(P1)
2.	$\mid p$	(KB-Annahme)
3.	$\mid (p \lor q)$	2., (ADD1)
4.	$\mid r$	3., 1., (MP)
5.	$(p \to r)$	2.–4., (KB)
6.	$\mid q$	(KB-Annahme)
7.	$\mid (p \lor q)$	6., (ADD2)
8.	$\mid r$	7., 1., (MP)
9.	$(q \to r)$	6.–8., (KB)
10.	$((p \to r) \land (q \to r))$	5., 9., (KON)

1.31 Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten

$\vdash (p \lor \neg p)$

1.	$\mid p$	(FU-Annahme 1)
2.	$\mid (p \lor \neg p)$	1., (ADD1)
3.	$\mid \neg p$	(FU-Annahme 2)
4.	$\mid (p \lor \neg p)$	3., (ADD2)
5.	$(p \lor \neg p)$	1.–4., (FU)

1.32 Assoziativität der Disjunktion (1)

$((p \lor q) \lor r) \vdash (p \lor (q \lor r))$

1.	$((p \lor q) \lor r)$	(P1)
2.	$(p \lor q)$	(FU-Annahme 1)
3.	p	(FU-Annahme 1)
4.	$(p \lor (q \lor r))$	3., (ADD1)
5.	$\neg p$	(FU-Annahme 2)
6.	q	2., 5., (DS1)
7.	$(q \lor r)$	6., (ADD1)
8.	$(p \lor (q \lor r))$	7., (ADD2)
9.	$(p \lor (q \lor r))$	3.–8., (FU)
10.	$\neg(p \lor q)$	(FU-Annahme 2)
11.	r	1., 10., (DS2)
12.	$(q \lor r)$	11., (ADD2)
13.	$(p \lor (q \lor r))$	12., (ADD2)
14.	$(p \lor (q \lor r))$	2.–13., (FU)

1.33 Assoziativität der Disjunktion (2)

$(p \vee (q \vee r)) \vdash ((p \vee q) \vee r)$

1.	$(p \vee (q \vee r))$	(P1)
2.	$(q \vee r)$	(FU-Annahme 1)
3.	q	(FU-Annahme 1)
4.	$(p \vee q)$	3., (ADD2)
5.	$((p \vee q) \vee r)$	4., (ADD1)
6.	$\neg q$	(FU-Annahme 2)
7.	r	2., 6., (DS1)
8.	$((p \vee q) \vee r)$	7., (ADD2)
9.	$((p \vee q) \vee r)$	3.–8., (FU)
10.	$\neg(q \vee r)$	(FU-Annahme 2)
11.	p	1., 10., (DS2)
12.	$(p \vee q)$	11., (ADD1)
13.	$((p \vee q) \vee r)$	12., (ADD1)
14.	$((p \vee q) \vee r)$	2.–13., (FU)

Anmerkung: Beispiele (1.32) und (1.33) zusammen zeigen, dass die Assoziativität der Disjunktion eine Äquivalenz ist.

1.34 Eine Paradoxie der materialen Implikation

$\vdash ((p \to q) \vee (q \to p))$

1.	p	(FU-Annahme 1)
2.	$\quad q$	(KB-Annahme)
3.	$\quad p$	1., (TS)
4.	$(q \to p)$	2.–3., (KB)
5.	$((p \to q) \vee (q \to p))$	4., (ADD2)
6.	$\neg p$	(FU-Annahme 2)
7.	$\quad p$	(KB-Annahme)
8.	$\quad q$	7., 6., (ECQ)
9.	$(p \to q)$	7.–8., (KB)
10.	$((p \to q) \vee (q \to p))$	9., (ADD1)
11.	$((p \to q) \vee (q \to p))$	1.–10., (FU)

Anmerkung: In dieser Ableitung finden wir Teile von Nr. (1.27) (*Axiom der Konditionalisierung*) und Nr. (1.28) (*Gesetz des Duns Scotus*) wieder.

1.35 Negation der Äquivalenz (1)

$\neg(p \leftrightarrow q) \vdash (\neg p \leftrightarrow q)$

1.	$\neg(p \leftrightarrow q)$	(P1)
2.	$\vert\ \neg p$	(KB-Annahme)
3.	$\vert\ \vert\ \neg q$	(IB-Annahme)
4.	$\vert\ \vert\ \vert\ p$	(KB-Annahme)
5.	$\vert\ \vert\ \vert\ q$	4., 2., (ECQ)
6.	$\vert\ \vert\ (p \rightarrow q)$	4.–5., (KB)
7.	$\vert\ \vert\ \vert\ q$	(KB-Annahme)
8.	$\vert\ \vert\ \vert\ p$	7., 3., (ECQ)
9.	$\vert\ \vert\ (q \rightarrow p)$	7.–8., (KB)
10.	$\vert\ \vert\ (p \leftrightarrow q)$	6., 9., (ÄQ-EIN)
11.	$\vert\ \vert\ ((p \leftrightarrow q) \wedge \neg(p \leftrightarrow q))$	10., 1., (KON)
12.	$\vert\ q$	3.–11., (IB)
13.	$(\neg p \rightarrow q)$	2.–12., (KB)
14.	$\vert\ q$	(KB-Annahme)
15.	$\vert\ \vert\ \neg\neg p$	(IB-Annahme)
16.	$\vert\ \vert\ p$	15., (DN2)
17.	$\vert\ \vert\ \vert\ p$	(KB-Annahme)
18.	$\vert\ \vert\ \vert\ q$	14., (TS)
19.	$\vert\ \vert\ (p \rightarrow q)$	17.–18., (KB)
20.	$\vert\ \vert\ \vert\ q$	(KB-Annahme)
21.	$\vert\ \vert\ \vert\ p$	16., (TS)
22.	$\vert\ \vert\ (q \rightarrow p)$	20.–21., (KB)
23.	$\vert\ \vert\ (p \leftrightarrow q)$	19., 22., (ÄQ-EIN)
24.	$\vert\ \vert\ ((p \leftrightarrow q) \wedge \neg(p \leftrightarrow q))$	23., 1., (KON)
25.	$\vert\ \neg p$	15.–24., (IB)
26.	$(q \rightarrow \neg p)$	14.–25., (KB)
27.	$(\neg p \leftrightarrow q)$	13., 26, (ÄQ-EIN)

1.36 Negation der Äquivalenz (2)

$(\neg p \leftrightarrow q) \vdash \neg(p \leftrightarrow q)$

1.	$(\neg p \leftrightarrow q)$	(P1)
2.	$(\neg p \rightarrow q)$	1., (ÄQ-ELIM1)
3.	$(q \rightarrow \neg p)$	1., (ÄQ-ELIM2)
4.	$\neg\neg(p \leftrightarrow q)$	(IB-Annahme)
5.	$(p \leftrightarrow q)$	4., (DN2)
6.	$(p \rightarrow q)$	5., (ÄQ-ELIM1)
7.	$(q \rightarrow p)$	5., (ÄQ-ELIM2)
8.	p	(FU-Annahme 1)
9.	q	8., 6., (MP)
10.	$\neg p$	9., 3,. (MP)
11.	$(p \wedge \neg p)$	8., 10., (KON)
12.	$\neg p$	(FU-Annahme 2)
13.	$\neg q$	7., 12., (MT)
14.	$\neg\neg p$	2., 13., (MT)
15.	p	14., (DN2)
16.	$(p \wedge \neg p)$	15., 12, (KON)
17.	$(p \wedge \neg p)$	8.–16., (FU)
18.	$\neg(p \leftrightarrow q)$	4.–17., (IB)

Anmerkung: Beispiele (1.35) und (1.36) zusammen zeigen, dass ‚$\neg(p \leftrightarrow q)$‘ und ‚$(\neg p \leftrightarrow q)$‘ äquivalent sind.

2 Prädikatenlogik

2.1 Abschwächung zur Existenzformel

$\forall x F(x) \vdash \exists x F(x)$

1.	$\forall x F(x)$	(P1)
2.	$F(y)$	1., (UB)
3.	$\exists x F(x)$	2., (EE)

2.2 Syllogismus Barbara

$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \forall x(G(x) \rightarrow H(x)) \vdash \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$

1.	$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	(P1)
2.	$\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$	(P2)
3.	$\mid F(y)$	(KB-Annahme)
4.	$\mid (F(y) \rightarrow G(y))$	1., (UB)
5.	$\mid G(y)$	3., 4., (MP)
6.	$\mid (G(y) \rightarrow H(y))$	2., (UB)
7.	$\mid H(y)$	5., 6., (MP)
8.	$(F(y) \rightarrow H(y))$	3.–7., (KB)
9.	$\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$	8., (UE)

2.3 Existenzielle Beseitigung, ein Beispiel

$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \vdash \exists x(G(x) \wedge F(x))$

1.	$\exists x(F(x) \wedge G(x))$	(P1)
2.	$\mid (F(y) \wedge G(y))$	(EB-Annahme)
3.	$\mid F(y)$	2., (SIMP1)
4.	$\mid G(y)$	2., (SIMP2)
5.	$\mid (G(y) \wedge F(y))$	4., 3., (KON)
6.	$\mid \exists x(G(x) \wedge F(x))$	5., (EE)
7.	$\exists x(G(x) \wedge F(x))$	2.–6., (EB)

2.4 Existenzquantor-Distribution

$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \vdash (\exists x F(x) \wedge \exists x G(x))$

1.	$\exists x(F(x) \wedge G(x))$	(P1)
2.	$\mid (F(y) \wedge G(y))$	(EB-Annahme)
3.	$\mid F(y)$	2., (SIMP1)
4.	$\mid \exists x F(x)$	3., (EE)
5.	$\exists x F(x)$	2.–4., (EB)
6.	$\mid (F(y) \wedge G(y))$	(EB-Annahme)
7.	$\mid G(y)$	6., (SIMP2)
8.	$\mid \exists x G(x)$	7., (EE)
9.	$\exists x G(x)$	6.–8., (EB)
10.	$(\exists x F(x) \wedge \exists x G(x))$	5., 9., (KON)

2.5 Allquantor-Distribution (1)

$(\forall x F(x) \vee \forall x G(x)) \vdash \forall x(F(x) \vee G(x))$

1.	$(\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$	(P1)
2.	$\mid F(y)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\mid (F(y) \vee G(y))$	2., (ADD1)
4.	$\mid \neg F(y)$	(FU-Annahme 2)
5.	$\mid\mid \neg\neg\forall x F(x)$	(IB-Annahme)
6.	$\mid\mid \forall x F(x)$	5., (DN2)
7.	$\mid\mid F(y)$	6., (UB)
8.	$\mid\mid (F(y) \wedge \neg F(y))$	7., 4., (KON)
9.	$\mid \neg\forall x F(x)$	5.–8., (IB)
10.	$\mid \forall x G(x)$	1., 9., (DS1)
11.	$\mid G(y)$	10., (UB)
12.	$\mid (F(y) \vee G(y))$	11., (ADD2)
13.	$(F(y) \vee G(y))$	2.–12., (FU)
14.	$\forall x(F(x) \vee G(x))$	13., (UE)

2.6 Allquantor-Distribution (2)

$(\forall x F(x) \vee \forall x G(x)) \vdash \forall x(F(x) \vee G(x))$

1.	$(\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$	(P1)
2.	$\mid\ \forall x F(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\mid\ F(y)$	2., (UB)
4.	$\mid\ (F(y) \vee G(y))$	3., (ADD1)
5.	$\mid\ \neg\forall x F(x)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\mid\ \forall x G(x)$	1., 5., (DS1)
7.	$\mid\ G(y)$	6., (UB)
8.	$\mid\ (F(y) \vee G(y))$	7., (ADD2)
9.	$(F(y) \vee G(y))$	2.–8., (FU)
10.	$\forall x(F(x) \vee G(x))$	9., (UE)

2.7 Negation der Allformel ...

$\neg\forall x F(x) \vdash \exists x \neg F(x)$

1.	$\neg\forall x F(x)$	(P1)
2.	$\mid\ \neg\exists x \neg F(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\mid\ \mid\ \neg F(y)$	(IB-Annahme)
4.	$\mid\ \mid\ \exists x \neg F(x)$	3., (EE)
5.	$\mid\ \mid\ (\exists x \neg F(x) \wedge \neg\exists x \neg F(x))$	4., 2., (KON)
6.	$\mid\ F(y)$	3.–5., (IB)
7.	$\mid\ \forall x F(x)$	6., (UE)
8.	$\mid\ (\forall x F(x) \wedge \neg\forall x F(x))$	7., 1., (KON)
9.	$\exists x \neg F(x)$	2.–8., (IB)

2.8 ... und umgekehrt (1)

$\exists x \neg F(x) \vdash \neg \forall x F(x)$

1.	$\exists x \neg F(x)$	(P1)
2.	$\mid \neg\neg \forall x F(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\mid \forall x F(x)$	2., (DN2)
4.	$\mid\mid \neg F(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\mid\mid F(y)$	3., (UB)
6.	$\mid\mid \neg \exists x \neg F(x)$	5., 4., (ECQ)
7.	$\mid \neg \exists x \neg F(x)$	4.–6., (EB)
8.	$\mid (\exists x \neg F(x) \wedge \neg \exists x \neg F(x))$	1., 7., (KON)
9.	$\neg \forall x F(x)$	2.–8., (IB)

2.9 ... und umgekehrt (2)

$\exists x \neg F(x) \vdash \neg \forall x F(x)$

1.	$\exists x \neg F(x)$	(P1)
2.	$\mid \neg F(y)$	(EB-Annahme)
3.	$\mid\mid \neg\neg \forall x F(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\mid\mid \forall x F(x)$	3., (DN2)
5.	$\mid\mid F(y)$	4., (UB)
6.	$\mid\mid (F(y) \wedge \neg F(y))$	5., 2., (KON)
7.	$\mid \neg \forall x F(x)$	3.–6., (IB)
8.	$\neg \forall x F(x)$	2.–7., (EB)

Anmerkung: Beispiele (2.7) und (2.8)/(2.9) zusammen zeigen eine wichtige Äquivalenz.

2.10 Negation der Existenzformel ...

$\neg\exists x F(x) \vdash \forall x \neg F(x)$

1.	$\neg\exists x F(x)$	(P1)
2.	$\neg\forall x \neg F(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\neg\neg F(y)$	(IB-Annahme)
4.	$F(y)$	3., (DN2)
5.	$\exists x F(x)$	4., (EE)
6.	$(\exists x F(x) \wedge \neg\exists x F(x))$	5., 1., (KON)
7.	$\neg F(y)$	3.–6., (IB)
8.	$\forall x \neg F(x)$	7., (UE)
9.	$(\forall x \neg F(x) \wedge \neg\forall x \neg F(x))$	8., 2., (KON)
10.	$\forall x \neg F(x)$	2.–9., (IB)

2.11 ... und umgekehrt (1)

$\forall x \neg F(x) \vdash \neg\exists x F(x)$

1.	$\forall x \neg F(x)$	(P1)
2.	$\neg\neg\exists x F(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\exists x F(x)$	2., (DN2)
4.	$F(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\neg F(y)$	1., (UB)
6.	$\neg\forall x \neg F(x)$	4., 5., (ECQ)
7.	$\neg\forall x \neg F(x)$	4.–6., (EB)
8.	$(\forall x \neg F(x) \wedge \neg\forall x \neg F(x))$	1., 7., (KON)
9.	$\neg\exists x F(x)$	2.–8., (IB)

2.12 ... und umgekehrt (2)

$\forall x \neg F(x) \vdash \neg \exists x F(x)$

1.	$\forall x \neg F(x)$	(P1)
2.	$\neg\neg\exists x F(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\exists x F(x)$	2., (DN2)
4.	$F(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\neg F(y)$	1., (UB)
6.	$\neg\exists x F(x)$	4., 5., (ECQ)
7.	$\neg\exists x F(x)$	4.–6., (EB)
8.	$(\exists x F(x) \wedge \neg\exists x F(x))$	3., 7., (KON)
9.	$\neg\exists x F(x)$	2.–8., (IB)

Anmerkung: Beispiele (2.10) und (2.11)/(2.12) zusammen zeigen eine weitere wichtige Äquivalenz.