Gesetze der Aussagenlogik: Folgerungsbeziehungen und Äquivalenzen

(nach einem Merkblatt von Univ.-Prof. Dr. R. Kamitz)

1 Folgerungsbeziehungen

1. $A_1, \ldots, A_n \models B$ gdw. es keine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, unter der $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A_1) = \ldots = \mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A_n) = \mathfrak{W}_\mathfrak{I}(\neg B) = w$ (d.h. gdw. $\{A_1, \ldots, A_n\} \cup \{\neg B\}$ *unerfüllbar* ist).
2. $A_1, \ldots, A_n \models A_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ (Reflexivität).
3. Wenn es keine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, unter der $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A_1) = \ldots = \mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A_n) = w$ (d.h. wenn $\{A_1, \ldots, A_n\}$ unerfüllbar ist), dann für jedes B: $A_1, \ldots, A_n \models B$ (*ex falso sequitur quodlibet*).
4. Wenn B tautologisch ist, dann für alle $A_1, \ldots, A_n$: $A_1, \ldots, A_n \models B$ (*verum sequitur ex quolibet*).
5. Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, dann $A_1, \ldots, A_n, C_1, \ldots, C_k \models B$ (Monotonie).
6. Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$ und $C_1, \ldots, C_k \models A_1,\ \ldots,\ C_1, \ldots, C_k \models A_n$, dann $C_1, \ldots, C_k \models B$ (Transitivität).
7. Modus ponens: $(A \to B), A \models B$
8. Modus tollens: $(A \to B), \neg B \models \neg A$
9. Beseitigung und Einführung der Konjunktion: $(A \wedge B) \models A\,,\ (A \wedge B) \models B,\ \ A, B \models (A \wedge B)$
10. Abschwächung zur Disjunktion (engl. „*addition*“): $A \models (A \vee B),\ A \models (B \vee A)$
11. Disjunktiver Syllogismus: $(A \vee B), \neg A \models B\,,\ (A \vee B), \neg B \models A$
12. Fallunterscheidung[1] (Konstruktives Dilemma): $(A \vee B), (A \to C), (B \to C) \models C$
13. Kettenschluss (Hypothetischer Syllogismus): $(A \to B), (B \to C) \models (A \to C)$

[1] Diese Bezeichnung ist nicht mit der Metaregel (FU) zu verwechseln, die an dem sog. „einfachen Dilemma“ $(A \to B), (\neg A \to B) \models B$ modelliert ist.

2 Äquivalenzen

In jeder Formelgruppe sind alle Formeln miteinander äquivalent:

1. Kommutativität
   (a) der Konjunktion: $(A \wedge B)$, $(B \wedge A)$
   (b) der Disjunktion: $(A \vee B)$, $(B \vee A)$
   (c) der Äquivalenzformel: $(A \leftrightarrow B)$, $(B \leftrightarrow A)$
2. Assoziativität
   (a) der Konjunktion: $(A \wedge (B \wedge C))$, $((A \wedge B) \wedge C)$
   (b) der Disjunktion: $(A \vee (B \vee C))$, $((A \vee B) \vee C)$
   (c) der Äquivalenzformel: $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$, $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$
3. Negation
   (a) der Negation (Doppelte Negation): $\neg\neg A$, A
   (b) der Konjunktion (DeMorgans Gesetz): $\neg(A \wedge B)$, $(\neg A \vee \neg B)$
   (c) der Disjunktion (DeMorgans Gesetz): $\neg(A \vee B)$, $(\neg A \wedge \neg B)$
   (d) der Implikationsformel: $\neg(A \rightarrow B)$, $(A \wedge \neg B)$
   (e) der Äquivalenzformel: $\neg(A \leftrightarrow B)$, $(A \leftrightarrow \neg B)$, $(\neg A \leftrightarrow B)$, $((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$
4. Importation/Exportation: $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$, $((A \wedge B) \rightarrow C)$
5. Kontraposition (Transposition):
   (a) $(A \rightarrow B)$, $(\neg B \rightarrow \neg A)$
   (b) $(A \rightarrow \neg B)$, $(B \rightarrow \neg A)$
   (c) $(\neg A \rightarrow B)$, $(\neg B \rightarrow A)$
6. Definition
   (a) der Implikationsformel:
      i. $(A \rightarrow B)$, $(\neg A \vee B)$
      ii. $(A \rightarrow B)$, $\neg(A \wedge \neg B)$
   (b) der Äquivalenformel:
      i. $(A \leftrightarrow B)$, $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
      ii. $(A \leftrightarrow B)$, $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$