Elementare Logik II
Michael Matzer

Über das Formalisieren in der Quantorenlogik

Inhaltsverzeichnis

1 Präliminarien

Formalisieren bedeutet: Repräsentation eines deutschen Aussagesatzes im quantorenlogischen System durch einen quantorenlogischen Satz. NB: Durch einen quantorenlogischen *Satz*, nicht durch eine offene Formel.
Dadurch können *eo ipso* auch Argumente formalisiert werden, da diese ja aus deutschen Aussagesätzen bestehen.

1.1 Formalisierungsschlüssel

Das Formalisieren in der Quantorenlogik vollzieht sich — wie schon in der Junktorenlogik — relativ zu je einem *Formalisierungsschlüssel*. In einem Formalisierungsschlüssel werden außerlogischen Konstanten von Q gewisse natürlichsprachliche Gebilde zugeordnet, und zwar:

- *Satzbuchstaben*: ganze deutsche Aussagesätze
- *Individuenkonstanten*: singuläre Terme, d.s. Ausdrücke, die irgendwelche Dinge[1] bezeichnen
- *n-stelligen Prädikaten*: n-stellige deutsche Prädikate

Ein deutsches Prädikat entsteht aus einem deutschen Aussagesatz, indem aus dem Satz einer oder mehrere singuläre Terme gestrichen werden. Daraus entsteht ein ergänzungsbedürftiges, „ungesättigtes“ (Gottlob Frege) Gebilde, das durch die Ergänzung singulärer Terme an den Leerstellen wieder zu einem Satz gemacht werden kann.

Beispiel: „Graz ist größer als Salzburg.“

- „... ist größer als Salzburg.“ — die Eigenschaft, größer als Salzburg zu sein: ein einstelliges deutsches Prädikat.
- „Graz ist größer als ....“ — die Eigenschaft, kleiner als Graz zu sein: wiederum ein (anderes) einstelliges deutsches Prädikat.
- „... ist größer als ....“ — die allgemeine Relation des Größerseins: ein zweistelliges deutsches Prädikat.

1.2 Zwei Gleichheitsprinzipien

Wie in der Junktorenlogik, so gelten auch in der Quantorenlogik zwei Gleichheitsprinzipien, eines auf Seiten der natürlichen Sprache und eines auf Seiten der formalen Sprache. Sie heißen „Synonymieprinzip“ und „Äquivalenzprinzip“.

- *Synonymieprinzip*: Synonyme, d.h. bedeutungsgleiche, Sätze dürfen durch denselben quantorenlogischen Satz formalisiert werden.

[1] In der Logik wird der Begriff des *Dinges* so weit gefasst, dass darunter alles fällt, worüber man sinnvoll reden kann.

- *Äquivalenzprinzip*: Wenn ein quantorenlogischer Satz zur Formalisierung eines bestimmten deutschen Satzes geeignet ist, so ist auch jeder mit ihm äquivalente Satz zur Formalisierung geeignet. M.a.W., äquivalente Sätze eignen sich gleich gut — oder auch gleich schlecht — zur Formalisierung eines deutschen Satzes.

Anmerkung: Es ist von Vorteil für das Formalisieren, wenn man einige Äquivalenzen kennt: Sollten sich mehrere verschiedene Q-Sätze zur Formalisierung anbieten, so macht die Erkenntnis von deren Äquivalenz, sofern sie besteht, die vielleicht schwierige Entscheidung, welcher Q-Satz für die Formalsierung zu wählen ist, überflüssig.

2 Formalisierungen in der Quantorenlogik

Ein Beispiel für einen Formalisierungsschlüssel:

H^1 : ...ist ein Hund.
F^1 : ...ist ein Fleischfresser.
G^1 : ...gehört dem Bürgermeister.
B^2 : ...ist bissiger als ....
M^1 : ...ist materiell.
V^1 : ...ist vergänglich.
A^1 : ...ist ein Apfel.
R^1 : ...ist rot.
W^1 : ...ist wohlschmeckend.
a : Astor
r : Rex

Anmerkung: In diesem Formalisierungsschlüssel kommen keine Zuordnungen zu Satzbuchstaben vor.

2.1 Formalisierungen durch atomare Sätze

2.1.1 Formalisierungen durch Satzbuchstaben

Darüber braucht an dieser Stelle nicht gehandelt zu werden, da dies aus der Elementaren Logik I als bereits bekannt vorausgesetzt wird.

2.1.2 Formalisierungen durch geschlossene Prädikationen

Zuerst wird das Prädikat, das das deutsche Prädikat gemäß Formalisierungsschlüssel vertritt, angeschrieben, und darauf folgend die Individuenkonstanten in jener Reihenfolge, in der das deutsche Prädikat durch singuläre Terme zum Satz ergänzt wird.

Beispiele:

- Rex ist ein Hund.
  H^1r

- Astor ist ein Hund.
  H^1a

- Rex ist ein Fleischfresser.
  F^1r

- Astor ist bissiger als Rex.
  B^2ar

- Rex ist bissiger als Astor.
  B^2ra

2.2 Formalisierungen durch molekulare Sätze

Formalisierungen durch molekulare Sätze funktionieren im Prinzip gleich wie in der Junktorenlogik, bloß können die Glieder der molekularen Sätze in der Quantorenlogik nun auch genuine $\mathcal{Q}$-Sätze sein.

Beispiele:

- Astor ist kein Fleischfresser.
  $\neg F^1a$

- Wenn Rex ein Hund ist, dann ist Rex ein Fleischfresser.
  $(H^1r \rightarrow F^1r)$

- Nur wenn Rex ein Hund ist, (dann) ist Rex ein Fleischfresser.
  $(F^1r \rightarrow H^1r)$ oder $(\neg H^1r \rightarrow \neg F^1r)$

- Astor ist ein Hund, der dem Bürgermeister gehört. / Astor ist ein Hund, und Astor gehört dem Bürgermeister.
  $(H^1a \wedge G^1a)$

- Astor und Rex gehören dem Bürgermeister. / Astor gehört dem Bürgermeister, und Rex gehört dem Bürgermeister.
  $(G^1a \wedge G^1r)$

2.3 Formalisierungen durch geschlossene Quantifikationen (1), mit höchstens zwei einstelligen Prädikaten

2.3.1 Uneingeschränkte Allsätze

Formalisierung im Sinne von: „Für alle Dinge x gilt: x ist so-und-so.“

Beispiele:

- Alles ist materiell.
  $\forall x M^1x$

- Alles ist vergänglich.
  $\forall x V^1x$

2.3.2 Uneingeschränkte Existenzsätze

Formalisierung im Sinne von: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass: x ist so-und-so."

Beispiele:

- Es gibt mindestens einen Hund.
  $\exists x H^1 x$

- Es gibt materielle Dinge.
  $\exists x M^1 x$

Anmerkung: In der Logik werden Ausdrücke wie ‚einige', ‚manche' und ‚es gibt' – trotz ihrer Formulierung im Plural — synonym mit ‚mindestens ein' verstanden.

2.3.3 Eingeschränkte Allsätze, zunächst nur A-Sätze

Allgemeine Form: „Alle A sind B." / „Jedes A ist (ein) B."
Formalisierung im Sinne von: „Für alle Dinge x gilt: <u>Wenn</u> x ein A ist, <u>dann</u> ist x ein B."
$\forall x(A^1 x \rightarrow B^1 x)$

Beispiele:

- Alle Äpfel sind rot.
  $\forall x(A^1 x \rightarrow R^1 x)$

- Alles Materielle ist vergänglich.
  $\forall x(M^1 x \rightarrow V^1 x)$

- Alle Hunde sind Fleischfresser.
  $\forall x(H^1 x \rightarrow F^1 x)$

Die von Karl R. Popper bevorzugte Form: $\neg\exists x(A^1 x \wedge \neg B^1 x)$ — dieser Satz ist äquivalent mit dem obigen.

2.3.4 Eingeschränkte Existenzsätze, zunächst nur I-Sätze

Allgemeine Form: „Einige A sind B." / „Manche A sind B." / „Es gibt A, die B sind." / „Mindestens ein A ist B."
Formalisierung im Sinne von: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass: x ist ein A, <u>und</u> x ist ein B."
$\exists x(A^1 x \wedge B^1 x)$

Beispiele:

- Einige Äpfel sind rot.
  $\exists x(A^1 x \wedge R^1 x)$

- Mindestens ein Hund gehört dem Bürgermeister.
  $\exists x(H^1 x \wedge G^1 x)$

- Manche Äpfel sind Hunde.
  $\exists x(A^1 x \wedge H^1 x)$

2.3.5 Kein-Sätze, zunächst nur E-Sätze

Allgemeine Form: „Kein A ist (ein) B."
Formalisierung im Sinne von: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein A ist, dann ist x kein B."
$\forall x(A^1x \rightarrow \neg B^1x)$
Alternativ: „Es ist nicht der Fall, dass es mindestens ein Ding x gibt derart, dass: x ist ein A und x ist ein B.
$\neg\exists x(A^1x \land B^1x)$

Beispiele:

- Kein Apfel ist rot.
  $\forall x(A^1x \rightarrow \neg R^1x)$ *oder* $\neg\exists x(A^1x \land R^1x)$
- Kein Hund gehört dem Bürgermeister. / Der Bürgermeister hat keine Hunde.
  $\forall x(H^1x \rightarrow \neg G^1x)$ *oder* $\neg\exists x(H^1x \land G^1x)$
- Nichts Rotes ist wohlschmeckend. / Kein rotes Ding ist wohlschmeckend.
  $\forall x(R^1x \rightarrow \neg W^1x)$ *oder* $\neg\exists x(R^1x \land W^1x)$

2.3.6 O-Sätze

Allgemeine Form: „Einige A sind nicht B." / „Manche A sind nicht B." / „Es gibt A, die nicht B sind." / „Mindestens ein A ist nicht B."
Formalisierung im Sinne von: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass: x ist ein A, und x ist kein B."
$\exists x(A^1x \land \neg B^1x)$

Beispiele:

- Einige Äpfel sind nicht rot.
  $\exists x(A^1x \land \neg R^1x)$
- Mindestens ein Hund ist kein Fleischfresser.
  $\exists x(H^1x \land \neg F^1x)$
- Mindestens ein Apfel gehört nicht dem Bürgermeister.
  $\exists x(A^1x \land \neg G^1x)$

2.3.7 Das logische Quadrat: Systematisierung der bisher behandelten eingeschränkten All- und Existenzsätze

A: **Alle** A **sind** B. $\forall x(A^1x \rightarrow B^1x)$ $\neg\exists x(A^1x \land \neg B^1x)$	I: **Einige** A **sind** B. $\exists x(A^1x \land B^1x)$
E: **Kein** A **ist** B. $\forall x(A^1x \rightarrow \neg B^1x)$ $\neg\exists x(A^1x \land B^1x)$	O: **Einige** A **sind nicht** B. $\exists x(A^1x \land \neg B^1x)$

AFFIRMO: Die beiden ersten Vokale des lateinischen Wortes ‚affirmo' (ich bejahe) sind ‚a' und ‚i'; demnach finden sich die bejahenden Sätze in der ersten Zeile: Links die generell bejahenden A-Sätze, rechts die partikulär bejahenden I-Sätze.
NEGO: Die beiden ersten Vokale des lateinischen Wortes ‚nego' (ich verneine) sind ‚e' und ‚o'; demnach finden sich die verneinenden Sätze in der zweiten Zeile: Links die generell verneinenden E-Sätze, rechts die partikulär verneinenden O-Sätze.

In den Spalten des logischen Quadrats stehen also: in der linken Spalte die generellen Sätze, und in der rechten Spalte die partikulären Sätze.

Die Sätze im logischen Quadrat stehen in vielfältigen Beziehungen zueinander; nur so viel sei an dieser Stelle angemerkt: Die Diagonalen sind kontradiktorische Gegensätze. Das erkennt man daran, dass sich die Formeln entlang der Diagonalen nur durch einen Negator am Satzanfang unterscheiden.

2.3.8 Zwei häufige Anfängerinnen- bzw. Anfängerfehler

Im logischen Quadrat ist zu sehen, dass der Hauptjunktor im Glied jeder Allquantifikation ein Subjunktor ist, und der Hauptjunktor im Glied jeder Existenzquantifikation ein Konjunktor ist. Das ist bei den eingeschränkten Sätzen der bisher besprochenen Art *immer* so.
Häufig geschieht es jedoch am Anfang, dass Sätze der Art ‚Alle A sind B' formalisiert werden im Sinne von: „Für alle Dinge x gilt: x ist ein A, und x ist ein B." Also z.B. der Satz: ‚Alle Äpfel sind rot' als ‚$\forall x(A^1x \land R^1x)$'. Das ist ein **Fehler (!)**, denn die Formel besagt etwas viel Stärkeres, nämlich „Alles (überhaupt) ist ein Apfel und rot." $\boldsymbol{Q}$-Sätze der Art $\forall x(A^1x \land B^1x)$ sind *nicht* geeignet, um Sätze der Art „Alle A sind B" zu formalisieren; sie eignen sich höchstens zur Formalisierung ontologischer Thesen wie z.B. „Alles ist materiell und vergänglich", was relativ zu dem gegebenen Formalisierungsschlüssel als ‚$\forall x(M^1x \land V^1x)$' dargestellt werden kann.
Ebenso unterläuft es manchen Personen am Anfang, dass Sätze der Art ‚Einige A sind B' formalisiert werden im Sinne von: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass: Wenn x ein A ist, dann ist x ein B." Also z.B. der Satz ‚Einige Äpfel sind rot' als ‚$\exists x(A^1x \to R^1x)$'. Das ist ein **Fehler (!)**, denn die Formel besagt etwas viel Schwächeres. Wie man sich semantisch leicht überzeugen kann, ist diese Formel falsch dann und nur dann, wenn alle Dinge die Eigenschaft A haben und kein einziges Ding die Eigenschaft R, d.h. wenn alles überhaupt ein Apfel ist und überhaupt nichts rot.[2] Das deckt sich aber nicht mit der Vorstellung, die wir von der Falschheitsbedingung des Satzes ‚Einige Äpfel sind rot' haben.[3]

Daher **merke:**

$\forall x(A^1x \land B^1x)$	Sehr stark; *nicht* geeignet zur Formalisierung von Sätze der Art „Alle A sind B."
$\exists x(A^1x \to B^1x)$	Zur Formalisierung deutscher Sätze nahezu *unbrauchbar*.

[2] Für den Hinweis auf die Falschheitsbedingung danke ich meinem Kollegen Norbert Hammerlindl (mündliche Kommunikation).

[3] Tatsächlich ist mir (M.M.) kein deutscher Satz bekannt, der formalisierbar wäre durch einen $\boldsymbol{Q}$-Satz, in dem der Hauptjunktor hinter einem Existenzquantifikator ein Subjunktor wäre. Sogar in einem Satz wie „Es gibt mindestens einen Apfel, und wenn er rot ist, dann ist er auch wohlschmeckend" ist der *Haupt*junktor im Glied der Existenzquantifikation ein Konjunktor: ‚$\exists x(A^1x \land (R^1x \to W^1x))$'.

2.3.9 Nur-Sätze (1), mit nur zwei Prädikaten

Allgemeine Form: „Nur A sind B.“
Formalisierung im Sinne von: „Für alle Dinge x gilt: Nur wenn x ein A ist, (dann) ist x ein B.“
$\forall x(B^1x \rightarrow A^1x)$ *oder* $\forall x(\neg A^1x \rightarrow \neg B^1x)$

Beispiele:

- Nur Äpfel sind rot.
  $\forall x(R^1x \rightarrow A^1x)$ *oder* $\forall x(\neg A^1x \rightarrow \neg R^1x)$
- Nur Materielles ist vergänglich.
  $\forall x(V^1x \rightarrow M^1x)$ *oder* $\forall x(\neg M^1x \rightarrow \neg V^1x)$
- Nur Hunde sind Fleischfresser.
  $\forall x(F^1x \rightarrow H^1x)$ *oder* $\forall x(\neg H^1x \rightarrow \neg F^1x)$

Anmerkung: Vielleicht kennen Sie das generöse Zugeständnis: „Alle Menschen sind Philosophen“ — seine Äußerung kann vom Biertisch bis hin zu namhaften Fachvertretern gefunden werden. Formalisieren wir (relativ zu einem *ad-hoc*-Formalisierungsschlüssel), so ergibt sich der *Q*-Satz ‚$\forall x(M^1x \rightarrow P^1x)$‘. Mit unserer Kenntnis über Nur-Sätze können wir diese Formel nun auch lesen als: „Nur Philosophen sind Menschen.“ Jedem Nicht-Philosophen kann mithin mit diesem Satz die Menschheit abgesprochen werden! Hier zeigt uns die Logik, wie sich ein zunächst generöses Zugeständnis durch eine andere Lesart in etwas ideologisch recht Bedenkliches verwandelt...

2.4 Zwei Exkurse

2.4.1 Die Frege-Quinesche Auffassung der Variablen als Pronomen

Individuenkonstanten repräsentieren im System *Q* singuläre Terme, d.s. sprachliche Ausdrücke, die jeweils einzelne Dinge bezeichnen. Doch sind an Termpositionen in unserem System *Q* auch noch andere Zeichen zugelassen: nämlich Variablen. Spielen sie auch eine Rolle in Bezug auf Einzeldinge, und wenn ja, welche?
Der Satz ‚Alles ist materiell‘ kann paraphrasiert (bedeutungserhaltend umformuliert) werden als: „Was es auch sei, es ist materiell.“ Das Pronomen ‚es‘ bedeutet kein einzelnes Ding, sondern es lässt durch den Vorspann ‚Was es auch sei‘ eine Aussage über alle Dinge machen. So verhält sich eine Variable in *Q* wie ein Pronomen der deutschen Sprache: Sie *be*deutet kein bestimmtes, einzelnes Ding, sondern sie ist ein „unbestimmt *an*deutendes“ Zeichen (Gottlob Frege). Den zwei Vorkommnissen von ‚es‘ in der obigen Paraphrase der materialistischen These entspricht in ihrer Formalisierung das zweimalige Auftreten der Variablen x: $\forall \underline{x} M^1 \underline{x}$.
Dieselbe Rolle spielt die Variable im Existenzsatz: Der Satz ‚Mindestens ein Ding ist materiell‘ kann paraphrasiert werden als „Es gibt mindestens ein-es derart, dass es materiell ist“, und er wird formalisiert als ‚$\exists \underline{x} M^1 \underline{x}$‘.
So wird auch klar, warum offene Formeln nicht wahrheitswertfähig sind, wie z.B. ‚M^1x‘. Nach der Frege-Quineschen Auffassung als Pronomen entspricht diese Formel dem deutschen Ausdruck ‚Es ist materiell‘, d.h. einem Ausdruck, in dem das Pronomen ‚es‘ keine

Referenz hat und der daher nicht wahrheitswertfähig ist. Wer diesen Ausdruck äußert, sollte mit der Rückfrage rechnen: „Was ist materiell?“ — Und diese Person wird vielleicht antworten, indem sie statt des Pronomens einen singulären Term verwendet, um die Materialität eines bestimmten Dinges zu behaupten (das Analogon der Einsetzung); oder die Person wird diesem Ausdruck den Vorspann ‚Was es auch sei‘ voranstellen und so die materialistische These äußern, oder sie wird ihm den Vorspann ‚Es gibt mindestens ein-es derart, dass‘ voranstellen (das Analogon des Bindens der Variablen durch einen Quantifikator).

2.4.2 Paraphrasen

Man muss, um einen deutschen Satz in der Quantorenlogik zu formalisieren, ihn eventuell so paraphrasieren, dass sich die gewonnene Paraphrase relativ leicht in einen Q-Satz überführen lässt. (Das war auch schon in der Junktorenlogik im System J so.) Aber in der Quantorenlogik muss man sich unter Umständen relativ weit von der grammatischen Form des deutschen Satzes entfernen. Die Formalisierung von ‚Alle Äpfel sind rot‘ hat nicht die Subjekt-Prädikat-Struktur des deutschen Satzes, aber sie enthält das Implikationszeichen, den Subjunktor. Hätten Sie das gedacht, bevor Sie davon in Ihrer Logikausbildung davon erfahren haben?

2.5 Formalisierungen durch geschlossene Quantifikationen (2), mit mehreren und mehrstelligen Prädikaten

2.5.1 Allsätze

- Alle roten Äpfel sind wohlschmeckend.
  $\forall x((A^1x \wedge R^1x) \to W^1x)$
- Alle Äpfel sind rot und wohlschmeckend.
  $\forall x(A^1x \to (R^1x \wedge W^1x))$
- Jeder Hund, der dem Bürgermeister gehört, ist bissiger als Rex.
  $\forall x((H^1x \wedge G^1x) \to B^2xr)$
- Jeder Hund gehört dem Bürgermeister und ist bissiger als Rex.
  $\forall x(H^1x \to (G^1x \wedge B^2xr))$
- Rex ist bissiger als jeder Hund, der dem Bürgermeister gehört.
  $\forall x((H^1x \wedge G^1x) \to B^2rx)$

2.5.2 Existenzsätze

- Mindestens ein roter Apfel ist wohlschmeckend.
  $\exists x((A^1x \wedge R^1x) \wedge W^1x)$
- Mindestens ein *im*materieller Apfel ist vergänglich.
  $\exists x((A^1x \wedge \neg M^1x) \wedge V^1x)$
- Manche Hunde, die dem Bürgermeister gehören, sind bissiger als Rex.
  $\exists x((H^1x \wedge G^1x) \wedge B^2xr)$

2.5.3 Kein-Sätze

- Kein roter Apfel ist wohlschmeckend.
  $\forall x((A^1x \land R^1x) \to \neg W^1x)$ *oder* $\neg\exists x((A^1x \land R^1x) \land W^1x)$

- Kein Hund, der dem Bürgermeister gehört, ist bissiger als Rex.
  $\forall x((H^1x \land G^1x) \to \neg B^2xr)$ *oder* $\neg\exists x((H^1x \land G^1x) \land B^2xr)$

- Der Bürgermeister hat keine *im*materiellen Hunde. / Kein *im*materieller Hund gehört dem Bürgermeister.
  $\forall x((H^1x \land \neg M^1x) \to \neg G^1x)$ *oder* $\neg\exists x((H^1x \land \neg M^1x) \land G^1x)$

2.5.4 Nur-Sätze (2), mit mehr als zwei Prädikaten

Diese Sätze legen eine gewisse Mehrdeutigkeit an den Tag. Beispielsweise kann man den Satz ‚Nur rote Äpfel sind wohlschmeckend' auf zwei Arten verstehen, je nach Betonung:

1. „NUR ROTE ÄPFEL sind wohlschmeckend."
   Formalisierung im Sinne von: „Für alle Dinge x gilt: Nur wenn x ein roter Apfel ist (= ein Apfel ist und rot ist), (dann) ist x wohlschmeckend."
   $\forall x(W^1x \to (A^1x \land R^1x))$ *oder* $\forall x(\neg(A^1x \land R^1x) \to \neg W^1x)$

2. „Nur ROTE Äpfel sind wohlschmeckend."
   Formalisierung im Sinne von: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Apfel ist, dann gilt (von x): Nur wenn x rot ist, (dann) ist x wohlschmeckend."
   $\forall x(A^1x \to (W^1x \to R^1x))$ *oder* $\forall x(A^1x \to (\neg R^1x \to \neg W^1x))$

Die $\mathcal{Q}$-Sätze unter (1) sind mit jenen unter (2) nicht äquivalent — wie auch die deutschen Sätze nicht synonym sind: Den ersten äußert eine Person, der überhaupt nur rote Äpfel schmecken und sonst nichts; den zweiten könnte jemand äußern, der oder die vielleicht alles mögliche isst, aber von den Äpfeln nur die roten mag.
Zwischen den Formeln unter (1) und (2) besteht jedoch eine einseitige Folgerungsbeziehung:

$$\begin{array}{rcl} \forall x(W^1x \to (A^1x \land R^1x)) & \models & \forall x(A^1x \to (W^1x \to R^1x)) \\ \forall x(A^1x \to (W^1x \to R^1x)) & \not\models & \forall x(W^1x \to (A^1x \land R^1x)) \end{array}$$

So sind die Sätze unter (1) *stärker* als die Sätze unter (2); wir nennen Auffassung (1) dieses Nur-Satzes die *starke* Auffassung, und die Auffassung unter (2) die *schwache* Auffassung.

NB: Die starke Auffassung ist in manchen Fällen zu stark. So könnte man den Satz ‚Nur Hunde, die dem Bürgermeister gehören, sind bissiger als Rex' stark formalisieren im Sinne von: „Für alle Dinge x gilt: Nur wenn x ein Hund ist und dem Bürgermeister gehört, (dann) ist x bissiger als Rex." Das würde folgenden $\mathcal{Q}$-Satz ergeben: $\forall x(B^2xr \to (H^1x \land G^1x))$. Mit diesem $\mathcal{Q}$-Satz könnte man nun folgenden Schluss ziehen: „Diese (eine, bestimmte) Ratte ist bissiger als Rex. Ergo gilt: Diese (eine, bestimmte) Ratte ist ein Hund und gehört dem Bürgermeister." — Um diesen Schluss zu vermeiden, ist es besser, diesen Satz schwach aufzufassen und zu formalisieren im Sinne von: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x

ein Hund ist, dann gilt (von x): Nur wenn x dem Bürgermeister gehört, (dann) ist x bissiger als Rex.“ Das würde den Q-Satz ‚$\forall x(H^1x \rightarrow (B^2xr \rightarrow G^1x))$‘ ergeben, und diese schwächere Formel lässt den Schluss mit der Ratte nicht mehr zu.

2.6 Formalisierungen durch geschlossene Quantifikationen (3), mit verschachtelten Quantifikatoren

Nun sind wir so weit, die volle Ausdruckskraft unseres Systems Q zu entfalten. Dabei ist es für den Erfolg der Formalisierung wiederum entscheidend, dass die gegebenen deutschen Sätze so paraphrasiert werden, dass sich die Paraphrase möglichst leicht in einen Q-Satz überführen lässt.

Anmerkung 1: Q-Sätze, bei denen alle Quantifikatoren am Formelanfang stehen und auf diese eine quantorenfreie Formel folgt (Sätze in sogenannter „pränexer Normalform“, PNF) sollten beim Formalisieren vermieden werden. Zum einen ist dadurch die Formel besser zur Kontrolle wieder verbalisierbar (relativ zum Formalisiserungsschlüssel lesbar), und die Herstellung eines Satzes in pränexer Normalform ist aufgrund einiger Quantorenverschiebungsgesetze nicht immer trivial.

Anmerkung 2: Beim Formalisieren mit verschachtelten Quantifikatoren ist für jeden Quantifikator eine eigene, neue Variable zu verwenden, da ansonsten eine „Variablenkollision“ entsteht: Man möchte ein und dieselbe Variable mal durch diesen und mal durch jenen Quantifikator binden, was natürlich nicht funktioniert. Die Verwendung jeweils paarweise verschiedener Variablen schafft da Abhilfe.

Das Folgende nun teilweise aus Kamitz, Reinhard: *Logik — Faszination der Klarheit. Eine Einführung für Philosophinnen und Philosophen mit zahlreichen Anwendungsbeispielen*, Bd. 2, Wien u.a.: LIT Verlag 2007 (Einführungen Philosophie 12), S. 427. Ziffern in Klammern hinter den Beispielsätzen geben die Satznummer auf dieser Seite an.

Für das Formalisieren mit verschachtelten Quantoren ist ein Vorrat an mehreren mehrstelligen Prädikaten von Vorteil, sodass folgender Formalisierungsschlüssel vereinbart wird:

M^1 : … ist ein Mensch.
P^1 : … ist ein Philosoph.
B^2 : … bewundert … .
S^3 : … spielt … gegen … aus.
e : Einstein
r : Russell

Alle folgenden Beispiele beziehen sich auf diesen Formalisierungsschlüssel.

Anmerkung: Die folgenden Sätze sind nicht immer geschlechterneutral formuliert. Das erlaube ich (M.M.) mir, da ich diese Sätze nicht mit behauptender Kraft äußere und sie somit nur als Beispiele dienen. Außerdem würde eine geschlechterneutrale Formulierung sprachliche Schnörkel wie beispielsweise ein ‚oder‘ in Wendungen wie ‚er oder sie‘ oder ‚sie oder ihn‘ einbringen, die sich nicht in einem Disjunktor niederschlagen und somit für mehr Verwirrung als Klarheit sorgen könnten.

2.6.1 Formalisierungen mit zwei Quantifikatoren

- Jeder (Mensch) bewundert irgendetwas. (90)
  Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gibt es mindestens ein Ding y derart, dass: x bewundert y."
  $\forall x(M^1x \rightarrow \exists yB^2xy)$[4]

- Jeder (Mensch) bewundert irgendjemanden. (91)
  Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gibt es mindestens ein Ding y derart, dass: y ist ein Mensch, und x bewundert y."
  $\forall x(M^1x \rightarrow \exists y(M^1y \wedge B^2xy))$

- Jeder (Mensch) wird von irgendjemandem bewundert.
  Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gibt es mindestens ein Ding y derart, dass: y ist ein Mensch, und x wird von y bewundert, d.h. y bewundert x."
  $\forall x(M^1x \rightarrow \exists y(M^1y \wedge B^2yx))$

- Alle Menschen bewundern jeden Philosophen. (84)
  Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gilt für alle Dinge y: Wenn y ein Philosoph ist, dann bewundert x y."
  $\forall x(M^1x \rightarrow \forall y(P^1y \rightarrow B^2xy))$
  [in PNF: $\forall x\forall y((M^1x \wedge P^1y) \rightarrow B^2xy)$]

- Kein Mensch bewundert keinen Philosophen. (87)
  Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist es nicht der Fall, dass: x bewundert keinen Philosophen."
  $\forall x(M^1x \rightarrow \neg\forall y(P^1y \rightarrow \neg B^2xy))$
  Alternativ: „Es gibt kein Ding x derart, dass: x ist ein Mensch, und es gibt keinen Philosophen y derart, dass: x bewundert y."
  $\neg\exists x(M^1x \wedge \neg\exists y(P^1y \wedge B^2xy))$

- Jemand bewundert alle Philosophen. (88)
  Paraphrase: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass: x ist ein Mensch, und für alle Dinge y gilt: Wenn y ein Philosoph ist, dann bewundert x y."
  $\exists x(M^1x \wedge \forall y(P^1y \rightarrow B^2xy))$

- Alle Philosophen bewundern jemanden. (89)
  Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Philosoph ist, dann gibt es mindestens einen Menschen y, sodass: x bewundert y."
  $\forall x(P^1x \rightarrow \exists y(M^1y \wedge B^2xy))$

- Mindestens ein Mensch bewundert keinen Philosophen.
  Paraphrase: „Es gibt mindestens einen Menschen x derart, dass: x bewundert keinen

[4] Würde hier für beide Quantifikatoren dieselbe Variable verwendet, sodass eine Variablenkollision entsteht, so resultierte die Formel ‚$\forall x(M^1x \rightarrow \exists xB^2xx)$', was äquivalent ist mit ‚$(\exists xM^1x \rightarrow \exists xB^2xx)$'. Die Verbalisierung dieser Formel lautet aber: „Wenn es mindestens einen Menschen gibt, so gibt es mindestens ein Ding, das sich selbst bewundert" — und das ist nicht synonym mit dem ursprünglichen Satz, der formalisiert werden sollte.

Philosophen."
$\exists x(M^1x \land \forall y(P^1y \to \neg B^2xy))$
$\exists x(M^1x \land \neg\exists y(P^1y \land B^2xy))$

- Kein Philosoph bewundert keinen Menschen. (93)
Paraphrase: „Für alle Philosophen x gilt: Es ist nicht der Fall, dass x bewundert keinen Menschen."
$\forall x(P^1x \to \neg\forall y(M^1y \to \neg B^2xy))$
Alternativ: „Es gibt keinen Philosophen x derart, dass: es gibt keinen Menschen y derart, dass x y bewundert."
$\neg\exists x(P^1x \land \neg\exists y(M^1y \land B^2xy))$

- Wer alle Menschen bewundert, der bewundert auch sich selbst. (94)
Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gilt: Wenn x alle Menschen y bewundert, dann bewundert x sich selbst."
$\forall x(M^1x \to (\forall y(M^1y \to B^2xy) \to B^2xx))$
Alternativ: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist und alle Menschen y bewundert, dann bewundert x sich selbst."
$\forall x((M^1x \land \forall y(M^1y \to B^2xy)) \to B^2xx)$

- Nur wer alle Menschen bewundert, der bewundert auch sich selbst. (95)
<u>stark:</u>
Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Nur wenn x ein Mensch ist und alle Menschen y bewundert, (dann) bewundert x sich selbst."
$\forall x(B^2xx \to (M^1x \land \forall y(M^1y \to B^2xy)))$
<u>schwach:</u>
Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gilt (von x): Nur wenn x alle Menschen y bewundert, (dann) bewundert x sich selbst."
$\forall x(M^1x \to (B^2xx \to \forall y(M^1y \to B^2xy)))$

- Niemand spielt alle Menschen gegen Russell aus. (96)
Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist es nicht der Fall, dass: x spielt alle Menschen y gegen Russell aus."
$\forall x(M^1x \to \neg\forall y(M^1y \to S^3xyr))$
Alternativ: „Es gibt kein Ding x derart, dass: x ist ein Mensch, und x spielt alle Menschen gegen Russell aus."
$\neg\exists x(M^1x \land \forall y(M^1y \to S^3xyr))$

- Jemand spielt alle Menschen gegen Russell aus. (97)
Paraphrase: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass: x ist ein Mensch, und x spielt alle Menschen gegen Russell aus."
$\exists x(M^1x \land \forall y(M^1y \to S^3xyr))$

- Es gibt Menschen, die jemanden gegen Russell ausspielen. (99)
Paraphrase: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass: x ist ein Mensch, und es gibt mindestens einen Menschen y derart, dass: x spielt y gegen Russell aus."
$\exists x(M^1x \land \exists y(M^1y \land S^3xyr))$

- Jemand spielt Einstein gegen alle (Menschen) aus. (100)
  Paraphrase: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass: x ist ein Mensch, und x spielt Einstein gegen alle Menschen y aus.“
  $\exists x(M^1x \wedge \forall y(M^1y \rightarrow S^3xey))$

- Jeder wird von jemandem bewundert, aber niemand wird von jedem bewundert. (101)
  Paraphrase: „Für alle Menschen x gilt: Es gibt mindestens einen Menschen y, der x bewundert — und für alle Menschen x gilt: Es ist nicht der Fall, dass alle Menschen y x bewundern.“
  $(\forall x(M^1x \rightarrow \exists y(M^1y \wedge B^2yx)) \wedge \forall x(M^1x \rightarrow \neg\forall y(M^1y \rightarrow B^2yx)))$[5]
  Alternativ (2. Teilsatz): „... und es gibt keine Menschen x derart, dass alle Menschen y x bewundern.“
  $(\forall x(M^1x \rightarrow \exists y(M^1y \wedge B^2yx)) \wedge \neg\exists x(M^1x \wedge \forall y(M^1y \rightarrow B^2yx)))$

- Wer Russell bewundert, der bewundert mindestens einen Philosophen. (102)
  Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gilt: Wenn x Russell bewundert, dann gibt es mindestens einen Philosophen y derart, dass x y bewundert.“
  $\forall x(M^1x \rightarrow (B^2xr \rightarrow \exists y(P^1y \wedge B^2xy)))$
  Alternativ: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist und Russell bewundert, dann gibt es mindestens einen Philosophen y derart, dass x y bewundert.“
  $\forall x((M^1x \wedge B^2xr) \rightarrow \exists y(P^1y \wedge B^2xy))$

2.6.2 Formalisierungen mit drei Quantifikatoren

- Es gibt Menschen, die jeden gegen jeden ausspielen. (98)
  Paraphrase: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass: x ist ein Mensch, und für alle Menschen y gilt: x spielt y gegen alle Menschen z aus.“
  $\exists x(M^1x \wedge \forall y(M^1y \rightarrow \forall z(M^1z \rightarrow S^3xyz)))$

- Wer jemanden bewundert, spielt ihn gegen niemanden aus. (103)
  Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gilt für alle Dinge y: Wenn y ein Mensch ist und x bewundert y, dann gibt es keinen Menschen z derart, dass: x spielt y gegen z aus.“
  $\forall x(M^1x \rightarrow \forall y((M^1y \wedge B^2xy) \rightarrow \neg\exists z(M^1z \wedge S^3xyz)))$
  [in PNF: $\forall x\forall y\forall z((((M^1x \wedge M^1y) \wedge M^1z) \wedge B^2xy) \rightarrow \neg S^3xyz)$]

- Wer jemanden bewundert, spielt niemanden gegen ihn aus. (104)
  Paraphrase: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gilt für alle Dinge y: Wenn y ein Mensch ist und x bewundert y, dann gibt es keinen Menschen z derart, dass: x spielt z gegen y aus.“
  $\forall x(M^1x \rightarrow \forall y((M^1y \wedge B^2xy) \rightarrow \neg\exists z(M^1z \wedge S^3xzy)))$
  [in PNF: $\forall x\forall y\forall z((((M^1x \wedge M^1y) \wedge M^1z) \wedge B^2xy) \rightarrow \neg S^3xzy)$]

[5] Hier entsteht keine Variablenkollision, da die Bereiche der mit x gleichnamigen Quantifikatoren und die der mit y gleichnamigen Quantifikatoren disjunkt und nicht verschachtelt sind. Das gilt auch für die alternative Formulierung.

3 Die Mehrdeutigkeit von ‚etwas' und ‚jemand'

Die Indefinitpronomina ‚etwas' und ‚jemand' sind mehrdeutig; manchmal werden durch sie Allsätze und manchmal Existenzsätze ausgedrückt.[6] Dazu einige Beispiele:

1. Wenn etwas auf das Dach meines Autos fällt, dann hinterlässt es dort eine Delle.
   Das ist ein versteckter Allsatz; er ist aufzufassen als: „Für alle Dinge x gilt: Wenn x auf das Dach meines Autos fällt, dann hinterlässt x dort eine Delle."

2. Etwas ist auf das Dach meines Autos gefallen.
   Das ist nun natürlich kein Allsatz; er besagt ja nicht, das alle Dinge in der Welt auf das Dach meines Autos gefallen sind, sondern er ist als Existenzsatz aufzufassen: „Es gibt mindestens ein Ding x derart, dass x auf das Dach meines Autos gefallen ist."

Ebenso verhält sich ‚jemand':

1. Wenn jemand ein Tier quält, so ist diese Person verabscheuungswürdig.
   Das ist wieder ein versteckter Allsatz; er ist aufzufassen als „Für alle Menschen x gilt: Wenn x ein Tier quält, so ist x verabscheuungswürdig."

2. Jemand quält ein Tier.
   Hier handelt es sich um einen Existenzsatz und nicht um einen Allsatz; der Satz besagt ja nicht, dass alle Menschen ein Tier quälen, sondern er ist aufzufassen als: „Es gibt mindestens eine Menschen x derart, dass x ein Tier quält."

Als Faustregel habe ich (M.M.) gefunden, dass ‚etwas' und ‚jemand' im hypothetischen Satz („Wenn etwas…" / „Wenn jemand …") zumeist einen Allsatz anzeigen (die Sätze mit der Nummer 1), und im Hauptsatz zumeist Existenzsätze ausdrücken (die Sätze mit der Nummer 2). Das ist aber nur eine Faustregel; Ausnahmen mag es geben.

[6] Vgl. R. Kamitz, *Logik — Faszination der Klarheit*, Bd. 2, S. 393f.