Elementare Logik I
Michael Matzer

Zur Semantik der Junktorenlogik

Inhaltsverzeichnis

1 Präliminarien

Für das Ausfüllen von Wahrheitstafeln die „CND-Expressmethode“ zur Zeitersparnis. Handout unter `http://www.uni-graz.at/michael.matzer/lehre.html`.

2 Tautologien, Kontradiktionen und kontingente Sätze von J

Das wurde in diesem Wintersemester 2013/14 bereits behandelt und wird hier daher nicht mehr im Detail ausgeführt.

2.1 Tautologien von J

Für alle Sätze φ gilt: φ ist eine Tautologie (bzw. φ ist tautologisch) gdw. φ bei allen Bewertungen wahr ist.

2.2 Kontradiktionen von J

Für alle Sätze φ gilt: φ ist eine Kontradiktion (bzw. φ ist kontradiktorisch)gdw. φ bei allen Bewertungen falsch ist.

2.3 Kontingente Sätze von J

Für alle Sätze φ gilt: φ ist kontingent gdw. φ weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion ist, d.h. gdw φ bei manchen Bewertungen wahr und bei manchen (anderen) Bewertungen falsch ist.

3 Äquivalenz in J

Demonstration mit dem Formelpaar P, $\neg\neg P$ – *duplex negatio affirmat.*

Für alle Sätze φ und ψ gilt: φ und ψ sind äquivalent gdw. φ und ψ bei allen Bewertungen denselben Wahrheitswert haben.

Prüfung mit dem Wahrheitstafelverfahren: Zwei Sätze sind äquivalent gdw. die beiden Spalten mit den Wahrheitswerten der Sätze in jeder Zeile identisch sind.

Beispiel für äquivalente Sätze: $(P \to (Q \leftrightarrow R))$ und $((P \wedge Q) \leftrightarrow (P \wedge R))$ sind äquivalent.

Beispiel für nicht äquivalente Sätze: $((A \vee \neg B) \to C)$ und $(\neg C \leftrightarrow (\neg A \wedge B))$ sind nicht äquivalent.

Bewertungen, wo die beiden Sätze verschiedene Wahrheitswerte haben, sind an der Wahrheitstafel ablesbar. So z.B.

B, C: 1 Rest: 0	oder	A: 0 Rest: 1

4 Kontradiktorischer Gegensatz in *J*

Demonstration mit dem Formelpaar P, $\neg P$.

Für alle Sätze φ und ψ gilt: φ und ψ bilden einen kontradiktorischen Gegensatz (stehen zu einander in kontradiktorischem Gegensatz) gdw. φ und ψ bei allen Bewertungen verschiedene Wahrheitswerte haben.

Anmerkung: Kontradiktorischer Gegensatz bedeutet, intuitiv formuliert, dass zwei Sätze weder zusammen wahr noch zusammen falsch sein können.

Anmerkung: Kontradiktorischer Gegensatz als Beziehung zwischen genau zwei Sätzen ist nicht zu verwechseln mit Kontradiktion, die eine Eigenschaft genau eines Satzes ist.

Prüfung mit dem Wahrheitstafelverfahren: Zwei Sätze bilden einen kontradiktorischen Gegensatz gdw. die beiden Spalten mit den Wahrheitswerten der beiden Sätze in jeder Zeile verschieden sind.

Beispiel für kontradiktorischen Gegensatz: $(P \rightarrow Q)$ und $(P \wedge \neg Q)$ bilden einen kontradiktorischen Gegensatz.

Beispiel für keinen kontradiktorischen Gegensatz: $(P \vee (Q \wedge R))$ und $(P \wedge (\neg Q \leftrightarrow R))$ bilden keinen kontradiktorischen Gegensatz.

Bewertungen, wo die beiden Sätze denselben Wahrheitswert haben, sind an der Wahrheitstafel ablesbar. So z.B.

P, Q: 1 Rest: 0	oder	P, R: 1 Rest: 0	oder	P, R: 0 Rest: 1	oder ...

Anmerkung: Für die Logikerin und den Logiker ist der Fall, dass zwei Sätze weder äquivalent sind, noch einen kontradiktorischem Gegensatz bilden, von wenig Interesse, sodass es dafür keinen eigenen Namen gibt.

5 Erfüllbarkeit in *J* und der Modellbegriff

Für alle Satzmengen Δ gilt: Δ ist erfüllbar gdw. es mindestens eine Bewertung gibt, bei der alle Elemente von Δ wahr sind.

Für alle Satzmengen Δ gilt: Δ ist unerfüllbar gdw. Δ nicht erfüllbar ist, d.h. gdw. es keine Bewertung gibt, bei der alle Elemente von Δ wahr sind.

Prüfung mit dem Wahrheitstafelverfahren: Eine Satzmenge ist erfüllbar gdw. es mindestens eine Zeile gibt, in der der Wahrheitswert aller Sätze ‚1' ist.

Beispiel für eine unerfüllbare Satzmenge: $\{(M \rightarrow C), (\neg M \rightarrow C), (M \wedge C), \neg(M \leftrightarrow C)\}$

Beispiel für eine erfüllbare Satzmenge: $\{(\neg P \vee Q), (\neg P \rightarrow Q), (P \vee Q)\}$

Für alle Satzmengen Δ und alle Bewertungen **B** gilt: **B** ist ein Modell von Δ gdw. alle Elemente von Δ wahr sind bei **B**.

Modelle sind an der Wahrheitstafel ablesbar — aus jeder Zeile, in der unter allen Sätzen der Wert ‚1' steht. So z.B. für die obige, erfüllbare Satzmenge:

alle Satzbuchstaben: 1 oder P, Q: 1
Rest: 0 oder Q: 1
Rest: 0

Für alle Sätze φ und alle Bewertungen **B** gilt: **B** ist ein Modell von φ gdw. **B** ein Modell von $\{\varphi\}$ ist, d.h. gdw φ wahr ist bei **B**.

6 Logisches Folgen in *J*, Sequenzen und Gegenbeispiele

Für alle Satzmengen Δ und alle Sätze φ gilt: φ folgt logisch aus Δ (kurz: $\Delta \models \varphi$) gdw. es keine Bewertung gibt, bei der alle Elemente von Δ wahr sind, und bei der φ falsch ist.

Alternativ (positiv formuliert):

Für alle Satzmengen Δ und alle Sätze φ gilt: $\Delta \models \varphi$ gdw. bei jeder Bewertung, bei der alle Elemente von Δ wahr sind, auch φ wahr ist.

Alternativ (mit dem Modellbegriff formuliert):

Für alle Satzmengen Δ und alle Sätze φ gilt: $\Delta \models \varphi$ gdw. jedes Modell von Δ auch ein Modell von φ ist.

Anmerkung: Für alle Satzmengen Δ und alle Sätze φ gilt: Wenn es nicht der Fall ist, dass $\Delta \models \varphi$, dann schreiben wir $\Delta \not\models \varphi$.

Prüfung mit dem Wahrheitstafelverfahren: $\Delta \models \varphi$ gdw. es keine Zeile gibt, in der unter allen Elementen von Δ der Wert ‚1' steht, aber unter φ der Wert ‚0' steht.[1]

Eine Sequenz (von *J*) ist ein geordnetes Paar, dessen erstes Glied eine Satzmenge von Sätzen von *J*, und dessen zweites Glied ein *J*-Satz ist.

Für alle Satzmengen Δ und alle Sätze φ gilt: Die Sequenz $\langle\Delta, \varphi\rangle$ ist gültig gdw. $\Delta \models \varphi$.

Für alle Satzmengen Δ und alle Sätze φ gilt: Die Sequenz $\langle\Delta, \varphi\rangle$ ist ungültig gdw. $\langle\Delta, \varphi\rangle$ nicht gültig ist, d.h. gdw. $\Delta \not\models \varphi$.

Anmerkung: Ein Argument besteht aus mindestens einer Prämisse, wobei die Zahl der Prämissen endlich ist und variieren kann, und aus genau einer Konklusion. So werden sich später Sequenzen zur Repräsentation von Argumenten in *J* eignen, da sie strukturell

[1] Nennt man eine Zeile, in der unter allen Elementen von Δ der Wert ‚1' steht, aber unter φ der Wert ‚0' steht, eine „böse Zeile" (in Anlehnung an den „bösen Fall" bei der Besprechung der deduktiven Korrektheit von Argumenten), so gilt: $\Delta \models \varphi$ gdw. die Wahrheitstafel keine „böse Zeile" enthält.

analog zu Argumenten sind: beliebig viele Prämissen (deswegen die Menge), und ein einzelner Satz, der als Konklusion ausgezeichnet ist.

Für alle Sequenzen $\langle\Delta, \varphi\rangle$ gilt: Δ ist die Prämissenmenge von $\langle\Delta, \varphi\rangle$, und φ ist die Konklusion von $\langle\Delta, \varphi\rangle$.

Beispiel für eine bestehende Folgerungsbeziehung: $\{(A \rightarrow B), A\} \models B$ (*modus ponens*)

Beispiel für eine nicht bestehende Folgerungsbeziehung: $\{(A \rightarrow B), B\} \not\models A$ (Fehlschluss von der Behauptung des Succedens)

Für alle Sequenzen $\langle\Delta, \varphi\rangle$ und alle Bewertungen **B**: **B** ist ein Gegenbeispiel zu $\langle\Delta, \varphi\rangle$ gdw. bei **B** alle Elemente von Δ wahr sind, aber φ bei **B** falsch ist.

Mithin gilt:

Für alle Satzmengen Δ und alle Sätze φ gilt: $\Delta \models \varphi$ (bzw. die Sequenz $\langle\Delta, \varphi\rangle$ ist gültig) gdw. es kein Gegenbeispiel zu $\langle\Delta, \varphi\rangle$ gibt.

Gegenbeispiele sind an der Wahrheitstafel ablesbar — aus jeder „bösen Zeile“. So z.B. für die obige, nicht bestehende Folgerungsbeziehung:

B: 1
Rest: 0

Beispiel für eine bestehende Folgerungsbeziehung: $\{H, (H \rightarrow U), (\neg U \vee F)\} \models (F \wedge U)$

7 Allgemeine Anmerkung

Es ist wichtig, zwischen den syntaktischen Verschiedenheiten auf der Ebene der Metasprache bei den besprochenen semantischen Begriffen genau zu unterscheiden:

- Tautologie, Kontradiktion und Kontingenz sind *Eigenschaften genau eines Satzes.*
- Äquivalenz und Kontradiktion sind *Beziehungen zwischen genau zwei Sätzen.*
- Erfüllbarkeit und Unerfüllbarkeit sind *Eigenschaften genau einer Satzmenge.*
- Logisches Folgen ist eine *Beziehung zwischen einer Satzmenge und einem Satz.*

8 Falls noch Zeit bleibt

8.1 Semantische Überlegungen

- Alle Tautologien sind paarweise miteinander äquivalent. – WAHR
- Alle Kontradiktionen sind paarweise miteinander äquivalent. – WAHR
- Alle kontingenten Sätze sind paarweise miteinander äquivalent. – FALSCH!

8.2 Einige wichtige Äquivalenzen

Handout *Folgerungen und Äquivalenzen (1)* unter
`http://www.uni-graz.at/michael.matzer/lehre.html`.

- Kommutativität von Konjunktion, Disjunktion und Bisubjunktion.
- Kontraposition
- Assoziativität von Konjunktion, Disjunktion und Subjunktion.
- Importation / Exportation

9 Literatur

Kamitz, Reinhard: *Logik – Faszination der Klarheit. Eine Einführung für Philosophinnen und Philosophen mit zahlreichen Anwendungsbeispielen*, Bd. 1, Wien u.a.: LIT Verlag 2007 (Einführungen Philsophie 11).