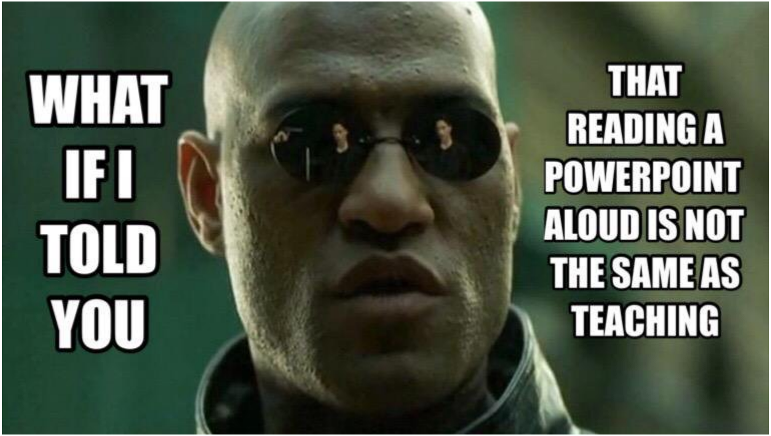

WHAT IF I TOLD YOU
THAT READING A POWERPOINT ALOUD IS NOT THE SAME AS TEACHING

Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Administratives & Einleitung

Michael Matzer

Version vom 28.02.2022, 14:13

Inhalt

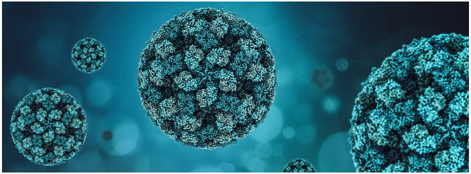
Inhalt

Das Notwendigste

LV-Typ *Kurs*: Anwesenheitspflicht!

- Abschlusskolloquium
- Bearbeitung von Übungsaufgaben
- mündliche Diskussionsbeiträge in den Sitzungen der Lehrveranstaltung

Covid-19



Virtueller Raum für Hybrid- und Online-Lehre dann und nur dann, wenn

- Bedarf angemeldet wird, und/oder
- der Übungsraum nicht voll besetzt werden darf, und/oder
- wir auf reine Online-Lehre umstellen müssen.

Inhalt

(Ent-) Warnung

In der ersten Sitzung einer Lehrveranstaltung, bei der Einleitung, neige ich (M.M.) immer dazu, sehr viel zu sagen.

Aber keine Sorge: Es kommt im Kurs nicht so geballt, wie unsere erste Sitzung vielleicht vermuten lässt!

(Ent-) Warnung

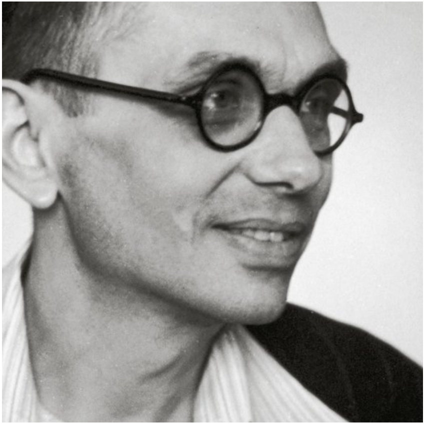
In der ersten Sitzung einer Lehrveranstaltung, bei der Einleitung, neige ich (M.M.) immer dazu, sehr viel zu sagen.

Aber keine Sorge: Es kommt im Kurs nicht so geballt, wie unsere erste Sitzung vielleicht vermuten lässt!

Bleiben Sie am Ball!

In formalwissenschaftlichen Lehrveranstaltungen wird üblicherweise einmal Erläutertes, und insbesondere einmal Bewiesenes, für den zukünftigen Rest der Lehrveranstaltung kommentarlos vorausgesetzt.

Kurt Gödel, 1906–1978



Inhalt

Logik-Lehrveranstaltungen

1. **Elementare Logik.** Hier Voraussetzung.
2. **Höhere Logik.** Z.B. Prädikatenlogik 2. Stufe.
3. **Philosophische Logik.** Spezifisch philosophische logische Wörter, z.B. Modallogik, Normenlogik, Zeitlogik, . . .
4. **Nicht-klassische Logik.** Grundannahmen der klassischen Logik gelten nicht, etwa das Bivalenzprinzip, das ontologische Gewicht des Existenzquantors (das manche sehen) oder das *ex falso quodlibet*.
5. **Philosophie der Logik.** Spezielle Wissenschaftstheorie: philosophische Fragen rund um die Logik.
6. **Metalogik.** Untersuchung der Logik mit logischen Methoden, z.B. Modelltheorie, Kalkültheorie, Definitionslehre . . . .

Logik-Lehrveranstaltungen

1. **Elementare Logik.** Hier Voraussetzung.
2. **Höhere Logik.** Z.B. Prädikatenlogik 2. Stufe.
3. **Philosophische Logik.** Spezifisch philosophische logische Wörter, z.B. Modallogik, Normenlogik, Zeitlogik, . . .
4. **Nicht-klassische Logik.** Grundannahmen der klassischen Logik gelten nicht, etwa das Bivalenzprinzip, das ontologische Gewicht des Existenzquantors (das manche sehen) oder das *ex falso quodlibet*.
5. **Philosophie der Logik.** Spezielle Wissenschaftstheorie: philosophische Fragen rund um die Logik.
6. **Metalogik.** Untersuchung der Logik mit logischen Methoden, z.B. Modelltheorie, Kalkültheorie, Definitionslehre . . . .

Logik-Lehrveranstaltungen

1. **Elementare Logik.** Hier Voraussetzung.
2. **Höhere Logik.** Z.B. Prädikatenlogik 2. Stufe.
3. **Philosophische Logik.** Spezifisch philosophische logische Wörter, z.B. Modallogik, Normenlogik, Zeitlogik, ...
4. **Nicht-klassische Logik.** Grundannahmen der klassischen Logik gelten nicht, etwa das Bivalenzprinzip, das ontologische Gewicht des Existenzquantors (das manche sehen) oder das *ex falso quodlibet*.
5. **Philosophie der Logik.** Spezielle Wissenschaftstheorie: philosophische Fragen rund um die Logik.
6. **Metalogik.** Untersuchung der Logik mit logischen Methoden, z.B. Modelltheorie, Kalkültheorie, Definitionslehre ....

Logik-Lehrveranstaltungen

1. **Elementare Logik.** Hier Voraussetzung.
2. **Höhere Logik.** Z.B. Prädikatenlogik 2. Stufe.
3. **Philosophische Logik.** Spezifisch philosophische logische Wörter, z.B. Modallogik, Normenlogik, Zeitlogik, . . .
4. **Nicht-klassische Logik.** Grundannahmen der klassischen Logik gelten nicht, etwa das Bivalenzprinzip, das ontologische Gewicht des Existenzquantors (das manche sehen) oder das *ex falso quodlibet*.
5. **Philosophie der Logik.** Spezielle Wissenschaftstheorie: philosophische Fragen rund um die Logik.
6. **Metalogik.** Untersuchung der Logik mit logischen Methoden, z.B. Modelltheorie, Kalkültheorie, Definitionslehre . . . .

Logik-Lehrveranstaltungen

1. **Elementare Logik.** Hier Voraussetzung.
2. **Höhere Logik.** Z.B. Prädikatenlogik 2. Stufe.
3. **Philosophische Logik.** Spezifisch philosophische logische Wörter, z.B. Modallogik, Normenlogik, Zeitlogik, ...
4. **Nicht-klassische Logik.** Grundannahmen der klassischen Logik gelten nicht, etwa das Bivalenzprinzip, das ontologische Gewicht des Existenzquantors (das manche sehen) oder das *ex falso quodlibet*.
5. **Philosophie der Logik.** Spezielle Wissenschaftstheorie: philosophische Fragen rund um die Logik.
6. **Metalogik.** Untersuchung der Logik mit logischen Methoden, z.B. Modelltheorie, Kalkültheorie, Definitionslehre ....

Logik-Lehrveranstaltungen

1. **Elementare Logik.** Hier Voraussetzung.
2. **Höhere Logik.** Z.B. Prädikatenlogik 2. Stufe.
3. **Philosophische Logik.** Spezifisch philosophische logische Wörter, z.B. Modallogik, Normenlogik, Zeitlogik, ...
4. **Nicht-klassische Logik.** Grundannahmen der klassischen Logik gelten nicht, etwa das Bivalenzprinzip, das ontologische Gewicht des Existenzquantors (das manche sehen) oder das *ex falso quodlibet*.
5. **Philosophie der Logik.** Spezielle Wissenschaftstheorie: philosophische Fragen rund um die Logik.
6. **Metalogik.** Untersuchung der Logik mit logischen Methoden, z.B. Modelltheorie, Kalkültheorie, Definitionslehre ....

Inhalt

Refresher und Ausblick

1. Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, dann $A_1, \ldots, A_n \vdash B$. (Vollständigkeit der Prädikatenlogik, Gödel 1930)
2. Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $A_1, \ldots, A_n \models B$. (Korrektheit der Prädikatenlogik)

Unvollständigkeit der Arithmetik: Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, dann gibt es mindenstens einen Satz der Arithmetik, der aus ihren Axiomen logisch folgt („im System der Arithmetik wahr ist“), aber nicht aus ihnen ableitbar ist. (Gödel 1931)

Refresher und Ausblick

1. Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, dann $A_1, \ldots, A_n \vdash B$. (Vollständigkeit der Prädikatenlogik, Gödel 1930)
2. Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $A_1, \ldots, A_n \models B$. (Korrektheit der Prädikatenlogik)

Unvollständigkeit der Arithmetik: Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, dann gibt es mindenstens einen Satz der Arithmetik, der aus ihren Axiomen logisch folgt („im System der Arithmetik wahr ist"), aber nicht aus ihnen ableitbar ist. (Gödel 1931)

Der Gödel-Satz in PM

Kurt Gödel, 1931: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*

Seien $A_1, \ldots, A_n$ die Axiome der *Principia Mathematica* (PM). Dann gibt es, sofern die PM widerspruchsfrei sind, mindestens einen PM-Satz B, sodass:

- $A_1, \ldots, A_n \nvdash_{PM} B$
- $A_1, \ldots, A_n \nvdash_{PM} \neg B$
- $A_1, \ldots, A_n \models_{PM} B$

Inhalt

Was uns erwartet

1. Historisch-systematische Einführung
2. Der Beweis im Detail
    1. Gödelisierung
    2. Arithmetisierung der Metamathematik / Syntax
    3. Repräsentierbarkeit
    4. „Gödels Trick“
3. Allgemeines über Diagonalbeweise
4. Bedeutung und Nicht-Bedeutung des Gödelschen Theorems

Was uns erwartet

1. Historisch-systematische Einführung
2. Der Beweis im Detail
    1. Gödelisierung
    2. Arithmetisierung der Metamathematik / Syntax
    3. Repräsentierbarkeit
    4. „Gödels Trick"
3. Allgemeines über Diagonalbeweise
4. Bedeutung und Nicht-Bedeutung des Gödelschen Theorems

Was uns erwartet

1. Historisch-systematische Einführung
2. Der Beweis im Detail
   1. Gödelisierung
   2. Arithmetisierung der Metamathematik / Syntax
   3. Repräsentierbarkeit
   4. „Gödels Trick“
3. Allgemeines über Diagonalbeweise
4. Bedeutung und Nicht-Bedeutung des Gödelschen Theorems

Was uns erwartet

1. Historisch-systematische Einführung
2. Der Beweis im Detail
   1. Gödelisierung
   2. Arithmetisierung der Metamathematik / Syntax
   3. Repräsentierbarkeit
   4. „Gödels Trick“
3. Allgemeines über Diagonalbeweise
4. Bedeutung und Nicht-Bedeutung des Gödelschen Theorems

Was uns erwartet

1. Historisch-systematische Einführung
2. Der Beweis im Detail
   1. Gödelisierung
   2. Arithmetisierung der Metamathematik / Syntax
   3. Repräsentierbarkeit
   4. „Gödels Trick“
3. Allgemeines über Diagonalbeweise
4. Bedeutung und Nicht-Bedeutung des Gödelschen Theorems

Was uns erwartet

1. Historisch-systematische Einführung
2. Der Beweis im Detail
   1. Gödelisierung
   2. Arithmetisierung der Metamathematik / Syntax
   3. Repräsentierbarkeit
   4. „Gödels Trick“
3. Allgemeines über Diagonalbeweise
4. Bedeutung und Nicht-Bedeutung des Gödelschen Theorems

Was uns erwartet

1. Historisch-systematische Einführung
2. Der Beweis im Detail
    1. Gödelisierung
    2. Arithmetisierung der Metamathematik / Syntax
    3. Repräsentierbarkeit
    4. „Gödels Trick“
3. Allgemeines über Diagonalbeweise
4. Bedeutung und Nicht-Bedeutung des Gödelschen Theorems

Inhalt

Das Barbier-Paradoxon

In einem Dorf gibt es einen Barbier, der all jene und nur jene Männer rasiert, die sich selbst nicht rasieren.

Frage: Rasiert der Barbier sich selbst?

(1) Annahme: Er rasiert sich selbst. Dann rasiert ihn nicht der Barbier. Also rasiert er sich nicht selbst.
(2) Annahme: Er rasiert sich nicht selbst. Dann rasiert ihn der Barbier. Also rasiert er sich selbst.
$\Rightarrow$ Der Barbier rasiert sich selbst gdw. er sich nicht selbst rasiert. $\lightning$

Das Barbier-Paradoxon

In einem Dorf gibt es einen Barbier, der all jene und nur jene Männer rasiert, die sich selbst nicht rasieren.

Frage: Rasiert der Barbier sich selbst?

(1) Annahme: Er rasiert sich selbst. Dann rasiert ihn nicht der Barbier. Also rasiert er sich nicht selbst.
(2) Annahme: Er rasiert sich nicht selbst. Dann rasiert ihn der Barbier. Also rasiert er sich selbst.
$\Rightarrow$ Der Barbier rasiert sich selbst gdw. er sich nicht selbst rasiert. $\lightning$

Der Lügner (1)

„Es hat einer von ihnen gesagt, ihr eigener Prophet: Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäuche.“ (Tit. 1, 12)

„Epimenides der Kreter sagte: Alle Kreter sind Lügner.“ (Bertrand Russell)

Der einzige Satz in diesem Rechteck ist falsch.

Der Lügner (2)

$\boxed{\text{Der einzige Satz in diesem Rechteck ist falsch.}}$

Frage: Ist der Satz wahr?

(1) Annahme: Er ist wahr. Dann verhält es sich so, wie er es besagt. Also ist er falsch.
(2) Annahme: Er ist falsch. Dann verhält es sich nicht so, wie er es besagt. Also ist er wahr.
$\Rightarrow$ Der Satz ist wahr gdw. er nicht wahr ist. ↯

Die Russellsche Mengenantinomie (1)

Georg Cantor, 1895: „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Definieren wir: Eine Menge ist *normal* gdw. sie sich nicht selbst als Element enthält.

Formal: Für jede Menge M, gilt, $N(M) \leftrightarrow M \notin M$

Die Russellsche Mengenantinomie (2)

Sei $\overline{M}$ die Menge aller normalen Mengen (d.h. die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst zum Element haben). Frage: Ist $\overline{M}$ normal?

(1) Annahme: $\overline{M}$ ist normal. Dann gilt (gemäß Definition einer normalen Menge): $\overline{M} \notin \overline{M}$. Also ist $\overline{M} \in \overline{M}$, der Menge aller normalen Mengen, und damit nicht normal.
(2) Annahme: $\overline{M}$ ist nicht normal. Dann gilt (gemäß Definition einer normalen Menge): $\overline{M} \in \overline{M}$. Also ist $\overline{M} \notin \overline{M}$, der Menge aller normalen Mengen, und damit normal.
$\Rightarrow$ $\overline{M}$ ist normal gdw. $\overline{M}$ nicht normal ist ($\overline{M} \in \overline{M}$ gdw. $\overline{M} \notin \overline{M}$). $\lightning$

Das Thomson-Theorem

James F. Thomson, 1966: „Let S be any set and R any relation defined at least on S. Then no element of S has R to all and only those S-elements which do not have R to themselves".

$$\neg\exists y \forall x (R(y,x) \leftrightarrow \neg R(x,x))$$

Cave

Gödels Satz ist allerdings *kein* Widerspruch, und beinhaltet auch *keinen* Widerspruch. (Auch nicht etwa von der Art eines Verstoßes gegen das Thomson-Theorem.)

„Gödel schrammt an der Antinomie vorbei.“ (R. Kamitz sen., 10.1.2006)

Erstaunlich!

Gödel hat im Jahre 1931 das File-Format (Dateiformat) erfunden — und das, obwohl der Computer in der Theorie erst 1936 erfunden wurde, von Alan M. Turing.

Alan M. Turing, 1912–1954

Ende

Ich wünsche Ihnen einen guten Start
in das neue Semester

und viel Erfolg
mit Kurt Gödel

sowie in Ihren übrigen Lehrveranstaltungen!