

Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Historisch-systematische Einführung

Michael Matzer

Version vom 06.04.2022, 20:06

Inhalt

- 1 Widersprüche und das Hilbert-Programm
- 2 Das Hilbert-Programm näherhin: Formalismus
- 3 Formale Systeme
- 4 Anhänge

Inhalt

- 1 Widersprüche und das Hilbert-Programm
- 2 Das Hilbert-Programm näherhin: Formalismus
- 3 Formale Systeme
- 4 Anhänge

Russell an Frege, 16.6.1902

[...] bin ich bis ins Einzelne selbständig zu denselben Ansichten geführt worden. Nur in einem Punkte ist mir eine Schwierigkeit begegnet. Sie behaupten (S. 17) es könne auch die Funktion das unbestimmte Element bilden. Dies habe ich früher geglaubt, jedoch jetzt scheint mir diese Ansicht zweifelhaft, wegen des folgenden Widerspruchs: Sei w das Prädicat, ein Prädicat zu sein welches von sich selbst nicht prädicirt werden kann. Kann man w von sich selbst prädiciren? Aus jeder Antwort folgt das Gegentheil. Deshalb muss man schließen dass w kein Prädicat ist. Ebenso giebt es keine Klasse (als Ganzes) derjenigen Klassen die als Ganze sich selber nicht angehören. [...]

Frege an Russell, 22.6.1902

Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik sich aufzubauen dachte, in's Wanken geräth. [...] Ich muss noch weiter über die Sache nachdenken. Sie ist um so ernster, als mit dem Wegfall meines Gesetzes V nicht nur die Grundlage meiner Arithmetik, sondern die einzig mögliche Grundlage der Arithmetik überhaupt zu versinken scheint. [...] Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen grossen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheint. [...]

Der zweite Band meiner Grundgesetze soll demnächst erscheinen. Ich werde ihm wohl einen Anhang geben müssen, in dem Ihre Entdeckung gewürdigt wird. Wenn ich nur erst den richtigen Gesichtspunkt dafür hätte!

Frege, *Grundgesetze*, Bd. 2, Nachwort: S. 253–265

Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als daß ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte.

Gottlob Frege: *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, Bd. 2, Jena: Verlag von Hermann Pohle 1903, Nachdr. Hildesheim u.a.: Georg Olms Verlag 1998, S. 253.

Reaktionen: Philosophie der Mathematik

- Logizismus (Gottlob Frege; Bertrand Russell & Alfred North Whitehead)
Frege: Widersprüche, R&W: unplausible (metaphysische?)
Axiome
- Intuitionismus (Luitzen Egbertus Jan Brouwer)
zu schwaches Logiksystem, Diskussion „eingeschlafen“
- Formalismus (David Hilbert)
Gödel 🚀

Hilbert-Programm

- Mathematik als formales System
 - Axiomatisierung
 - Formalisierung
- Widerspruchsfreiheitsbeweise
 - Metamathematik

Finite Methoden

Inhalt

- 1 Widersprüche und das Hilbert-Programm
- 2 Das Hilbert-Programm näherhin: Formalismus
- 3 Formale Systeme
- 4 Anhänge

1. Axiomatisierung

- Vokabular der Theorie
- entscheidbare Axiomenmenge

Ein Satz ist *einschlägig für eine Theorie* gdw. er im Vokabular der Theorie formulierbar ist.

Wenn ein (einschlägiger) Satz aus den Axiomen der Theorie logisch folgt, so „gehört er mit zur Theorie“ / so ist er *wahr in der Theorie*.

2. Formalisierung

- Explikation / Schärfung des Folgerungsbegriffs

Wenn ein (einschlägiger formalsprachlicher) Satz aus den Axiomen der Theorie ableitbar ist, so ist er ein *Theorem* / ein *(Lehr-) Satz* der Theorie.

Vereinbaren wir ...

Abkürzungen:

V: Es herrscht Vollbeschäftigung.

W: Die Wirtschaft wächst.

Abgekürzte Sätze, beispielsweise:

- „Nicht V, außer W.“
- „Wenn V, dann W.“

Abstimmung

Argument 1:

1. Nicht V, außer W.

Wenn V, dann W.

G: ____ / U: ____ / K: ____

Argument 3:

1. Nicht V, außer W.

Wenn nicht V,
dann nicht W.

G: ____ / U: ____ / K: ____

Argument 2:

1. Nicht V, außer W.

Wenn W, dann V.

G: ____ / U: ____ / K: ____

Argument 4:

1. Nicht V, außer W.

Wenn nicht W,
dann nicht V.

G: ____ / U: ____ / K: ____

Auflösung

Alle vier Argumente sind gültig.

Inhalt

- 1 Widersprüche und das Hilbert-Programm
- 2 Das Hilbert-Programm näherhin: Formalismus
- 3 Formale Systeme**
- 4 Anhänge

Formales System

- (endlich) axiomatisierte, formalisierte Theorie
- Theoreme sind aus den Axiomen ableitbar
- Produktion von Theoremen ist ein rein formales „Spiel“

(Es folgt eine Demonstration eines — sehr einfachen — formalen Systems.)

Beispiel: Formales System



Formales Mini-System

- Vokabular: {O, RE}
- Axiom
 - OREO
- Ableitungsregeln
 - (K) Die erste Silbe¹ einer Silbenreihe der Länge ≥ 2 darf weggelassen werden.
 - (D) Eine Silbenreihe darf „verdoppelt“ werden.

‚REOOREO‘ und ‚REOREOREO‘ sind Theoreme.

☞ Ist ‚REORE‘ ein Theorem?

¹Unter eine Silbe wird für dieses Beispiel, sprachwissenschaftlich nicht ganz korrekt, entweder der Buchstabe ‚O‘ oder das Buchstabenpaar ‚RE‘ verstanden.

Formales Mini-System

- Axiomenmenge: {OREO}
- (K) Die erste Silbe einer Silbenreihe der Länge ≥ 2 darf weggelassen werden.
- (D) Eine Silbenreihe darf „verdoppelt“ werden.

Theorem 1. REOOREO

Beweis:

1. OREO	(P1)
<hr/>	
2. OREOOREO	1., (D)
3. REOOREO	2., (K)

Formales Mini-System

- Axiomenmenge: {OREO}
- (K) Die erste Silbe einer Silbenreihe der Länge ≥ 2 darf weggelassen werden.
- (D) Eine Silbenreihe darf „verdoppelt“ werden.

Theorem 2. REOREOREO

Beweis:

1. OREO	(P1)
<hr/>	
2. REO	1., (K)
3. REOREO	2., (D)
4. REOREOREO	3., (D)
5. OREOREOREO	4., (K)
6. REOREOREO	5., (K)

Formales Mini-System

- Axiomenmenge: {OREO}
- (K) Die erste Silbe einer Silbenreihe der Länge ≥ 2 darf weggelassen werden.
- (D) Eine Silbenreihe darf „verdoppelt“ werden.

‚REORE‘ ist *kein* Theorem. Beweis: Keine Formel, die auf ‚RE‘ endet, ist Element der Axiomenmenge. Und keine Ableitungsregel führt von etwas, das nicht auf ‚RE‘ endet, zu etwas, das auf ‚RE‘ endet.

„... endet nicht auf ‚RE‘“ ist eine *erbliche Eigenschaft*.

Keine Formel, die auf ‚RE‘ endet, ist ein Theorem.

Das war jetzt zwar nicht Metamathematik, aber „Metakalkül“.

Musik

Musiktheorie: Darstellung von Musik als formales System (von Musiken als formale Systeme).

Grundkonfigurationen und Übergänge von gewissen Zeichenkombinationen (häufig Ansammlungen von Noten) auf andere, die

- erlaubt,
- verboten, oder sogar
- erlaubt und sogar besonders erwünscht sind.

Für besonders erwünschte Übergänge in der Musik vgl. in formalen Systemen „elegante Beweise“, „Kniffe“, auf die man nicht so bald kommt, etc.

Inhalt

- 1 Widersprüche und das Hilbert-Programm
- 2 Das Hilbert-Programm näherhin: Formalismus
- 3 Formale Systeme
- 4 Anhänge**

Moderne Ergänzung: Computer

Computer können mit formalen Systemen besonders gut umgehen (milliardenfach schneller als Menschen), und es ist das einzige, was Computer können.

Das Hilbert-Programm nach Gödel

Transfinite Methoden

- 1936 Gerhard Gentzen, Widerspruchsfreiheit der Arithmetik
- 1936 Wilhelm Ackermann, Widerspruchsfreiheit eines Teils der Mengenlehre
- 1951 Paul Lorenzen, Widerspruchsfreiheit der verzweigten Typentheorie
- 1951 Paul Lorenzen, Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis

