$$\pi \approx 3,14159265358979323846264338327 9\ldots$$

3-14

Happy π-Day!!

Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Arithmetik

Michael Matzer

Version vom 06.04.2022, 20:06

Inhalt

Inhalt

Neue Individuenkonstante

‚0' ist eine Individuenkonstante.

(Alle anderen Individuenkonstanten bleiben.)

Identität

Neue logische Konstante: das zweistellige Prädikat ‚$=$'.

$a = b, F(a) \models F(b)$

Neue Regeln im Kalkül: (REF), (SUB) (vgl. Leitgeb, S. 279)
(REF) $\vdash \forall v \; v = v$
(SUB) $\vdash \forall v_1 \forall v_2 (v_1 = v_2 \land A[v_1/v_3] \rightarrow A[v_2/v_3])$

Für die Negation der Identität schreiben wir ‚$\neq$'.

Funktoren (Funktionssymbole)

Neue außerlogische Konstante: n-stellige Funktoren (Funktionssymbole) für $n \geq 1$:
häufig $f^1, g^1, h^1, \ldots, f^2, g^2, h^2, \ldots$, für uns auch interessant:
$'$ (einstellig), $+$ (zweistellig), $\cdot$ (zweistellig)

Erweiterung des Termbegriffs:

1. Jede Individuenkonstante und jede Variable ist ein Term.
2. Wenn $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ Terme sind, und φ ein n-stelliger Funktor ist, dann ist auch $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ein Term.

Also sind Terme: a, x (wie bisher), 0 (unsere neue Individuenkonstante), aber nun auch: $f^1(a)$, $g^2(a, b)$, $g^2(x, x)$, $h^2(f^1(x), g^2(y, z))$ $\ldots$, sowie $'(x)$, $+(0, 0)$, $\cdot(x, y)$, $+('(0),'('(0)))$, $\cdot('(0), +(x,'(y)))$, $\ldots$

Funktoren: Postfix-Notation und Infix-Notation

Der einstellige Funktor ‚$'$' wird nachgestellt: $0', 0'', 0''', x', x'', \ldots$

Im Falle zweistelliger Funktoren schreiben wir diese manchmal auch zwischen die Argumente:

$0 + 0$, $x \cdot y$, $\ldots$

$0' + 0''$, $0' \cdot (x + y')$, $\ldots$

Zusammenfassung

Erweiterung des Logiksystems:

- neue Individuenkonstante ‚0'
- Identität ($=$, Negation $\neq$)
- Funktoren (Funktionssymbole), dazu Termbegriff erweitert

Der einstellige Funktor ‚$'$' wird nachgestellt: $0', 0'', 0''', x', x'', \ldots$

Zweistellige Funktoren werden manchmal zwischen die Argumente gestellt: $0 + 0$, $x \cdot y, \ldots$

Inhalt

Axiom 1

Die Null ist eine natürliche Zahl.

$$Z(0)$$

Axiom 2

Der Nachfolger jeder natürlichen Zahl ist (wieder) eine natürliche Zahl.

$$\forall x (Z(x) \rightarrow Z(x'))$$

Axiom 3

Die Null ist nicht Nachfolger irgendeiner natürlichen Zahl.

$$\forall x(Z(x) \to 0 \neq x')$$

Axiom 4

Wenn Funktionswerte der Nachfolgerfunktion gleich sind, so handelt es sich um den Nachfolger ein und derselben natürlichen Zahl.

(„Die Nachfolgerfunktion ist injektiv.“)

$$\forall x \forall y((Z(x) \wedge Z(y)) \rightarrow (x' = y' \rightarrow x = y))$$

Alternativ: Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.

$$\forall x \forall y((Z(x) \wedge Z(y)) \rightarrow (x \neq y \rightarrow x' \neq y'))$$

Axiom 5

Wenn

- die Null eine bestimmte Eigenschaft Φ hat, und
- sich die Eigenschaft Φ von jeder natürlichen Zahl auf ihren Nachfolger „überträgt“,

dann haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft Φ.

$$\forall\Phi((\Phi(0) \wedge \forall x(Z(x) \rightarrow (\Phi(x)) \rightarrow \Phi(x'))) \rightarrow \forall x(Z(x) \rightarrow \Phi(x)))$$

Peano-Arithmetik: *Principia Mathematica*, Gödel

Vokabular: $\{0,'\}$

Axiome:

1. $Z(0)$
2. $\forall x(Z(x) \to Z(x'))$
3. $\forall x(Z(x) \to 0 \neq x')$
4. $\forall x \forall y((Z(x) \wedge Z(y)) \to (x' = y' \to x = y))$
5. $\forall \Phi((\Phi(0) \wedge \forall x(Z(x) \to (\Phi(x)) \to \Phi(x'))) \to \forall x(Z(x) \to \Phi(x)))$

Definitionen:

$\forall x\ x + 0 = x$	$\forall x\ x \cdot 0 = 0$
$\forall x \forall y\ x + y' = (x + y)'$	$\forall x \forall y\ x \cdot y' = (x \cdot y) + x$

Inhalt

Axiome 1–3

Die Nachfolgerfunktion ist injektiv.

$$\forall x \forall y (x' = y' \rightarrow x = y)$$

Die Null ist nicht Nachfolger irgendeiner natürlichen Zahl.

$$\forall x \; 0 \neq x'$$

Jede natürliche Zahl außer der Null ist Nachfolger einer natürlichen Zahl.

$$\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y \; x = y')$$

Axiome 4–7

rekursive Definition der Addition

$$\forall x \; x + 0 = x$$

$$\forall x \forall y \; x + y' = (x + y)'$$

rekursive Definition der Multiplikation

$$\forall x \; x \cdot 0 = 0$$

$$\forall x \forall y \; x \cdot y' = (x \cdot y) + x$$

Robinson-Arithmetik: einfacher

Vokabular: $\{0, ', +, \cdot\}$

Axiome:

1. $\forall x \forall y (x' = y' \rightarrow x = y)$
2. $\forall x\ 0 \neq x'$
3. $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y\ x = y')$
4. $\forall x\ x + 0 = x$
5. $\forall x \forall y\ x + y' = (x + y)'$
6. $\forall x\ x \cdot 0 = 0$
7. $\forall x \forall y\ x \cdot y' = (x \cdot y) + x$

Inhalt

Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl ≥ 1 ist eindeutig in Primfaktoren zerlegbar.

Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gibt es Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$, sodass

$$\prod_{i=1}^{k} p_i = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k) = n$$

Die p_i sind, bis auf ihre Reihenfolge, eindeutig bestimmt.

Beispiele

$2 = 2$	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	$22 = 2 \cdot 11$
$3 = 3$	$13 = 13$	$23 = 23$
$4 = 2 \cdot 2$	$14 = 2 \cdot 7$	$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$5 = 5$	$15 = 3 \cdot 5$	$25 = 5 \cdot 5$
$6 = 2 \cdot 3$	$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$26 = 2 \cdot 13$
$7 = 7$	$17 = 17$	$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$	$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$	$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$
$9 = 3 \cdot 3$	$19 = 19$	$29 = 29$
$10 = 2 \cdot 5$	$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
$11 = 11$	$21 = 3 \cdot 7$	$31 = 31$

Inhalt

Die Teilbarkeitsrelation, vgl. Gödel, Nr. 1

$$x \leq y \equiv \exists z\ x + z = y$$

$$x/y \equiv \exists z(z \leq x \wedge x = y \cdot z)$$

So gilt beispielsweise: $6/3$, da $\exists z(z \leq 6 \wedge 6 = 3 \cdot z)$, nämlich die 2. Ebenso gilt: $12/2$, $12/4$, $39/13$, etc.

Es gilt nicht: $12/7$, $12/8$, $25/2$, $37/12$, etc.

Die Primzahleigenschaft

$$\mathrm{Prim}(x) \equiv \neg\exists z(z \leq x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge x/z) \wedge x > 1$$

(vgl. Gödel, Nr. 2)

Damit sind die Primzahlen auch aufzählbar: $Pr(1) = 2$, $Pr(2) = 3$, $Pr(3) = 5$, $Pr(4) = 7$, ...

(vgl. Gödel, Nr. 5)

Eindeutigkeit des größten Primzahlexponenten

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3.$

Klarerweise gilt: $12/2$, d.h. $12/2^1$.

Es gilt aber auch: $12/4$, d.h. $12/2^2$.

Nicht gilt: $12/2^3$, also $12/8$ (oder allgemein $12/2^k$ für irgendein $k > 2$).

Es gilt also, für die Primzahlen 2 und 3:

- $12/2^2$, aber nicht $12/2^{2+1}$. Die 2 ist also der größte Exponent der Primzahl 2 in der 12.
- $12/3^1$, aber nicht $12/3^{1+1}$. Die 1 ist also der größte Exponent der Primzahl 3 in der 12.

Noch ein Beispiel

Betrachten wir die Zahl $4050 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^2$.

$4050/2^1$, aber nicht $4050/2^{1+1}$.
$4050/3^4$, aber nicht $4050/3^{4+1}$.
$4050/5^2$, aber nicht $4050/5^{2+1}$.

Also gilt:
Der größte Exponent der Primzahl 2 in 4050 ist 1.
Der größte Exponent der Primzahl 3 in 4050 ist 4.
Der größte Exponent der Primzahl 5 in 4050 ist 2.

Mit Gödels Funktionen

$Pr(1) = 2$, $Pr(2) = 3$, $Pr(3) = 5$, ... — „$Pr(n)$ ist die n-te Primzahl (der Größe nach).“ (Gödel, Nr. 5)

$4050 = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^2$.

Der größte Exponent der $2 = Pr(1)$ in 4050 ist 1.
$1 \; Gl \; 4050 = 1$

Der größte Exponent der $3 = Pr(2)$ in 4050 ist 4.
$2 \; Gl \; 4050 = 4$

Der größte Exponent der $5 = Pr(3)$ in 4050 ist 2.
$3 \; Gl \; 4050 = 2$

(vgl. Gödel, Nr. 6)

Und wozu das Ganze?

So kann man die Zahlen 1, 4, 2 in eine Ordnung bringen, und sowohl die Zahlen als auch ihre Anordnung durch eine einzige Zahl repräsentieren: 4050.

Man kann die Zahlen 1, 4, 2 in dieser Reihenfolge aus der 4050 auch wieder zurückgewinnen, da sie die größten Exponenten der ersten drei Primzahlen in 4050 sind: $1\ \mathit{Gl}\ 4050 = 1$, $2\ \mathit{Gl}\ 4050 = 4$, $3\ \mathit{Gl}\ 4050 = 2$.

Auf diese Weise *codiert* die Zahl 4050 die Zahlenreihe 1, 4, 2.

Das wird ab der nächsten Einheit und für den Rest unseres Semesters höchst wichtig werden!