Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Gödelisierung

Michael Matzer

Version vom 01.04.2022, 20:33

Inhalt

Inhalt

Idee

Gödels Idee: In der Arithmetik einen Satz formulieren, der besagt, dass er nicht beweisbar ist.

Problem: In der Arithmetik sind nur Aussagen über Zahlen möglich, nicht Aussagen über Zeichen, Sätze (Formeln) und Beweise: keine metamathematischen Aussagen.

Lösung: Aussagen über Zeichen, Sätze (Formeln) und Beweise der Arithmetik in Aussagen über Zahlen überführen.

„Gödelisierung“: Jedem Zeichen, jeder Formel (jedem Satz) und jedem Beweis der Arithmetik eineindeutig eine natürliche Zahl zuordnen.

Brute Force

$$\begin{array}{ll} F(a) & 0 \\ \neg F(a) & 1 \\ \neg\neg F(a) & 2 \\ \neg\neg\neg F(a) & 3 \\ \neg\neg\neg\neg F(a) & 4 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

☞ Was wäre mit ‚$G(a)$', ‚$\neg G(a)$', ‚$\neg\neg G(a)$', ..., ‚$F(b)$', ‚$\neg F(b)$', ..., ‚$(F(a) \wedge G(a))$', ..., $\forall x\, x = a$, ...?

☞ Wir schicken die Sätze in „Hilberts Hotel"!

Brute Force

$$\begin{array}{ll} F(a) & 0 \\ \neg F(a) & 1 \\ \neg\neg F(a) & 2 \\ \neg\neg\neg F(a) & 3 \\ \neg\neg\neg\neg F(a) & 4 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

☞ Was wäre mit ‚$G(a)$', ‚$\neg G(a)$', ‚$\neg\neg G(a)$', ..., ‚$F(b)$', ‚$\neg F(b)$', ..., ‚$(F(a) \wedge G(a))$', ..., $\forall x\, x = a$, ...?

☞ Wir schicken die Sätze in „Hilberts Hotel"!

„Hilberts Hotel“ (1)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

„Hilberts Hotel“ (1)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Ein neuer Gast, N, kommt an. $\Rightarrow$?

„Hilberts Hotel“ (1)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Ein neuer Gast, N, kommt an. $\Rightarrow$?

$\boxed{\text{VACANCY}}$

„Hilberts Hotel“ (1)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Ein neuer Gast, N, kommt an. $\Rightarrow$?

VACANCY

Umzug G_n in Zimmer $n+1$:

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	$\cdots$

„Hilberts Hotel" (1)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Ein neuer Gast, N, kommt an. $\Rightarrow$?

VACANCY

Umzug G_n in Zimmer $n+1$:

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	$\cdots$

Einquartierung des neuen Gastes:

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
N	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	$\cdots$

„Hilberts Hotel“ (2)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

„Hilberts Hotel“ (2)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	...
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	...

Drei neue Gäste, N_0, N_1 und N_2 kommen an. $\Rightarrow$?

„Hilberts Hotel“ (2)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Drei neue Gäste, N_0, N_1 und N_2 kommen an. $\Rightarrow$?

VACANCY

„Hilberts Hotel" (2)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Drei neue Gäste, N_0, N_1 und N_2 kommen an. $\Rightarrow$?

VACANCY

Umzug G_n in Zimmer $n+3$:

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
			G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	$\cdots$

„Hilberts Hotel“ (2)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Drei neue Gäste, N_0, N_1 und N_2 kommen an. $\Rightarrow$?

VACANCY

Umzug G_n in Zimmer $n + 3$:

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
			G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	$\cdots$

Einquartierung der neuen Gäste:

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
N_0	N_1	N_2	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	$\cdots$

„Hilberts Hotel“ (3)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

„Hilberts Hotel“ (3)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Unendlich viele neue Gäste, $\forall n \in \mathbb{N}\ N_n$, kommen an. $\Rightarrow$?

„Hilberts Hotel" (3)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Unendlich viele neue Gäste, $\forall n \in \mathbb{N}\ N_n$, kommen an. $\Rightarrow$?

VACANCY

„Hilberts Hotel“ (3)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Unendlich viele neue Gäste, $\forall n \in \mathbb{N}\ N_n$, kommen an. $\Rightarrow$?

VACANCY

Umzug G_n in Zimmer $2 \cdot n$:

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0		G_1		G_2		G_3		$\cdots$

„Hilberts Hotel“ (3)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	…
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	…

Unendlich viele neue Gäste, $\forall n \in \mathbb{N}\ N_n$, kommen an. $\Rightarrow$?

VACANCY

Umzug G_n in Zimmer $2 \cdot n$:

0	1	2	3	4	5	6	7	…
G_0		G_1		G_2		G_3		…

Einquartierung der neuen Gäste:

0	1	2	3	4	5	6	7	…
G_0	N_0	G_1	N_1	G_2	N_2	G_3	N_3	…

„Hilberts Hotel“ (4)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

„Hilberts Hotel“ (4)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	$\cdots$

Unendlich viele neue Gäste, $\forall x \in \mathbb{R}\ N_x$, kommen an. $\Rightarrow$?

„Hilberts Hotel" (4)

Hilberts Hotel ist ausgebucht.

0	1	2	3	4	5	6	7	...
G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	...

Unendlich viele neue Gäste, $\forall x \in \mathbb{R}\ N_x$, kommen an. $\Rightarrow$?

$\boxed{\text{NO VACANCY}}$

Inhalt

Gödelsierungsschlüssel (1)

Zeichen, von denen es nur endlich viele gibt

$\neg$	1	$=$	15
$\wedge$	3	(	17
$\vee$	5	)	19
$\rightarrow$	7	,	21
$\leftrightarrow$	9	$'$	23
$\forall$	11	$+$	25
$\exists$	13	$\cdot$	27

Gödelsierungsschlüssel (2)

Zeichen, von denen es unendlich viele gibt: Variablen und Individuenkonstanten

x	29	0	29^2
y	31	a	31^2
z	37	b	37^2
x_1	41	c	41^2
y_1	43	d	43^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Gödelsierungsschlüssel (3)

Zeichen, von denen es unendlich viele gibt: Prädikate

P^1_1	29^3	P^2_1	29^4
P^1_2	31^3	P^2_2	31^4
P^1_3	37^3	P^2_3	37^4
P^1_4	41^3	P^2_4	41^4
P^1_5	43^3	P^2_5	43^4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Allgemein: n-stellige Prädikate $P^n_{\dots}$ durch $(n+2)$-te Potenzen von Primzahlen größer als 23.

Aussagen (1)

1. ‚x' ist eine Variable.

Wir blicken in den Gödelisierungsschlüssel:

2. 29 ist erste Potenz einer Primzahl > 23.
3. 29 ist Gödelzahl einer Variablen.

Wir schreiben mit Kapitälchen:

4. 29 ist eine VARIABLE.

(vgl. Gödel, Nr. 11f.)

Die Sätze (1), (3) und (4) sind, vermöge des vereinbarten Gödelisierungsschlüssels, *gödelisierungsäquivalent*.

Aussagen (2)

1. ‚P_2^2' ist ein zweistelliges Prädikat.
2. $923521 = 31^4$ ist vierte Potenz einer Primzahl > 23.
3. 923521 ist Gödelzahl eines zweistelligen Prädikats.
4. 923521 ist ein ZWEISTELLIGES PRÄDIKAT.

Wiederum sind die Sätze (1), (3) und (4), vermöge des vereinbarten Gödelisierungsschlüssels, gödelisierungsäquivalent.

Inhalt

Zeichenreihen sind Reihen

Sätze der Arithmetik sind Zeichenreihen.

Jedes Zeichen hat eine eindeutige Gödelzahl (siehe Gödelisierungsschlüssel).

Wie man eine Reihe von Zahlen in eine einzige Zahl codiert, wissen wir schon!

Zeichenreihen (1): Codierung (1)

$$0 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & = & 0 \\ 29^2 & 15 & 29^2 \\ 841 & 15 & 841 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 841, 15, 841

Auf die bekannte Weise codieren wir: $2^{841} \cdot 3^{15} \cdot 5^{841}$. (Die resultierende Zahl hat 849 Stellen.)

Zeichenreihen (1): Codierung (2)

$$\forall x \, \neg 0 = x'$$

$\forall$	x	$\neg$	0	$=$	x	$'$
11	29	1	29^2	15	29	23
11	29	1	841	15	29	23

$\Rightarrow$ 11, 29, 1, 841, 15, 29, 23

Auf die bekannte Weise codieren wir:
$2^{11} \cdot 3^{29} \cdot 5^{1} \cdot 7^{841} \cdot 11^{15} \cdot 13^{29} \cdot 17^{23}$. (Die resultierende Zahl hat 805 Stellen.)

Zeichenreihen (2): Decodierung (1)

Ist 1971673206341025390893388386210035053314 9317285334232066307067871093750000000000 Gödelzahl einer Formel, und wenn ja, welcher?

$\Rightarrow$ Primfaktorenzerlegung: $2^{11} \cdot 3^{29} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{29}$
$\Rightarrow$ Reihe: 11, 29, 29, 15, 29

11	29	29	15	29
$\forall$	x	x	$=$	x

$$\forall x\, x = x$$

$\Rightarrow$ Obenstehende (lange) Zahl ist eine FORMEL.

Zeichenreihen (2): Decodierung (1)

Ist 1971673206341025390893388386210035053314 93172853342320663070678710937500000000000 Gödelzahl einer Formel, und wenn ja, welcher?

$\Rightarrow$ Primfaktorenzerlegung: $2^{11} \cdot 3^{29} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{29}$
$\Rightarrow$ Reihe: 11, 29, 29, 15, 29

11	29	29	15	29
$\forall$	x	x	$=$	x

$$\forall x \; x = x$$

$\Rightarrow$ Obenstehende (lange) Zahl ist eine Formel.

Zeichenreihen (2): Decodierung (1)

Ist 1971673206341025390893388386210035053314
93172853342320663070678710937500000000000 Gödelzahl einer Formel, und wenn ja, welcher?

$\Rightarrow$ Primfaktorenzerlegung: $2^{11} \cdot 3^{29} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{29}$
$\Rightarrow$ Reihe: 11, 29, 29, 15, 29

11	29	29	15	29
$\forall$	x	x	$=$	x

$$\forall x \; x = x$$

$\Rightarrow$ Obenstehende (lange) Zahl ist eine FORMEL.

Zeichenreihen (2): Decodierung (2)

Ist 5733089280 Gödelzahl einer Formel, und wenn ja, welcher?

$\Rightarrow$ Primfaktorenzerlegung: $2^{19} \cdot 3^{7} \cdot 5^{1}$

$\Rightarrow$ Reihe: 19, 7, 1

19	7	1
)	$\rightarrow$	$\neg$

$$) \rightarrow \neg$$

$\Rightarrow$ 5733089280 ist keine Formel.

Zeichenreihen (2): Decodierung (2)

Ist 5733089280 Gödelzahl einer Formel, und wenn ja, welcher?

$\Rightarrow$ Primfaktorenzerlegung: $2^{19} \cdot 3^{7} \cdot 5^{1}$
$\Rightarrow$ Reihe: 19, 7, 1

19	7	1
$)$	$\rightarrow$	$\neg$

$$) \rightarrow \neg$$

$\Rightarrow$ 5733089280 ist keine FORMEL.

Zeichenreihen (2): Decodierung (2)

Ist 5733089280 Gödelzahl einer Formel, und wenn ja, welcher?

$\Rightarrow$ Primfaktorenzerlegung: $2^{19} \cdot 3^{7} \cdot 5^{1}$
$\Rightarrow$ Reihe: 19, 7, 1

19	7	1
)	$\rightarrow$	$\neg$

$$) \rightarrow \neg$$

$\Rightarrow$ 5733089280 ist keine FORMEL.

Anmerkung

Korollar

- Die Gödelzahl jedes Zeichens ist ungerade (siehe Gödelisierungsschlüssel);
- die Gödelzahl jeder Zeichenreihe ist gerade (da sie den Primfaktor 2, näherhin einen Faktor 2^k für $k \geq 1$, enthält), und
- die Gödelzahl jeder Zeichenreihe hat ungerade Primzahlexponenten (da letztere sämtlich Gödelzahlen von Zeichen sind).

Inhalt

Ein Beweis

1. $\forall x \; x = x$ (REF)
2. $0 = 0$ 1., (UB)

Ein Beweis — reduziert

$$\forall x \; x = x$$
$$0 = 0$$

$\Rightarrow$ Ein Beweis ist also eine Reihe von Formeln, von denen jede entweder (1) ein Axiom ist, oder (2) aus voraufgehenden Formeln gemäß den Regeln des formalen Systems entsteht.

$\Rightarrow$ Das bewiesene Theorem ist die letzte Formel im Beweis: die abgeleitete Konklusion.

Gödelisierung der Formeln

$\forall x\ x = x$

$2^{11} \cdot 3^{29} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{29}$

Nennen wir diese große Zahl g_1.

$0 = 0$

$2^{841} \cdot 3^{15} \cdot 5^{841}$

Nennen wir diese (sehr) große Zahl g_2.

Gödelisierung der Formeln

$\forall x\ x = x$
$2^{11} \cdot 3^{29} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{29}$
Nennen wir diese große Zahl g_1.

$0 = 0$
$2^{841} \cdot 3^{15} \cdot 5^{841}$
Nennen wir diese (sehr) große Zahl g_2.

Gödelisierung des Beweises

$\Rightarrow$ g_1 und g_2 bilden eine Reihe von Zahlen — und wie man eine Reihe von Zahlen gödelisiert, wissen wir schon:

$$2^{g_1} \cdot 3^{g_2} =$$

$$2^{2^{11} \cdot 3^{29} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{29}} \cdot 3^{2^{841} \cdot 3^{15} \cdot 5^{841}}$$

Diese (beinahe schon unvorstellbar) große Zahl ist die Gödelzahl unseres zweizeiligen Beweises der Formel ‚$0 = 0$'.

Gödelisierung des Beweises

$\Rightarrow$ g_1 und g_2 bilden eine Reihe von Zahlen — und wie man eine Reihe von Zahlen gödelisiert, wissen wir schon:

$$2^{g_1} \cdot 3^{g_2} =$$

$$2^{2^{11} \cdot 3^{29} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{29}} \cdot 3^{2^{841} \cdot 3^{15} \cdot 5^{841}}$$

Diese (beinahe schon unvorstellbar) große Zahl ist die Gödelzahl unseres zweizeiligen Beweises der Formel ‚$0 = 0$'.

Anmerkung

Korollar

- Die Gödelzahl jedes Beweises ist gerade (da sie als Gödelzahl einer Reihe, d.i. als $\textsc{Reihe}$, die 2 als Faktor enthält), und
- sie hat gerade Primzahlexponenten (da die Gödelzahl jeder Reihe, damit jeder Zeichenreihe und daher jeder Formel gerade ist).

Und wozu das Ganze?

Wir werden

- metamathematische Eigenschaften und Relationen von Zeichen, Formeln und Beweisen
- in arithmetische Eigenschaften und Relationen ihrer jeweiligen Gödelzahlen

überführen (auf dem Wege der „Gödelisierungsäquivalenz").

Das ist die *Arithmetisierung der Metamathematik*.