Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Rekursive Funktionen

Michael Matzer

Version vom 23.05.2023, 19:08

Inhalt

Inhalt

Idee

Thoralf Skolem (1923): *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich*

Idee:

$$\begin{aligned} f(\ldots 0 \ldots) &= \ldots \\ f(\ldots n' \ldots) &= f(\ldots n \ldots) \end{aligned}$$

(Es folgt die technische Darstellung für primitiv-rekursive Funktionen.)

Primitiv-rekursive Funktionen

Bei Gödel noch schlechthin „rekursiv definierte Funktionen“.

Seien ψ eine r-stellige und μ eine $(r+2)$-stellige rekursiv definierte Funktionen. Dann ist auch eine rekursiv definierte Funktion:

$$\begin{aligned} f(0, a_1, \ldots, a_r) &= \psi(a_1, \ldots, a_r) \\ f(n', a_1, \ldots, a_r) &= \mu(n, f(n, a_1, \ldots, a_r), a_1, \ldots, a_r) \end{aligned}$$

(vgl. Gödel, S. 156, 158)

$\Rightarrow$ Das ist eine induktive (rekursive) Definition: Wenn man (schon) irgendwelche rekursiv definierten Funktionen hat, dann kann man nach dem obigen Schema immer neue konstruieren.

Epsilon

Primitiv-rekursiv ist auch

$$f(x, y) = \varepsilon z\,(z \leq \phi(x) \wedge R(z, y))$$

„das kleinste z, das kleiner oder gleich $\phi(x)$ ist und in der Relation R zu y steht“

- Ohne die obere Schranke $\phi(x)$ ist die Funktion allgemein-rekursiv. (Vgl. Gödels Kommentar zu Nr. 46.)
- Bekannter als Gödels ‚ε‘ ist das von Stephen Cole Kleene verwendete ‚μ‘ für „das kleinste ...“.

Rekursive Prädikate (Relationen)

Eine Relation $R(x_1, \ldots, x_n)$ ist rekursiv gdw. es eine rekursive Funktion f gibt, sodass

$$R(x_1, \ldots, x_n) \text{ gdw. } f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

(Vgl. Gödel S. 158.)

f ist die *charakteristische Funktion der Relation R*.

Exitenzquantor und Allquantor

Primitiv-rekursiv sind auch

$$S(x, y) = \exists z \, (z \leq \phi(x) \wedge R(z, y))$$

$$T(x, y) = \forall z \, (z \leq \phi(x) \rightarrow R(z, y))$$

(Vgl. Gödel S. 158, 160.)

Beispiel: Rekursionstiefe 0

Beispiel: Rekursionstiefe 1

Beispiel: Rekursionstiefe 2

Inhalt

Addition, Multiplikation, Potenz

$$x + 0 = x$$
$$x + y' = (x + y)'$$

$$x \cdot 0 = 0$$
$$x \cdot y' = (x \cdot y) + x$$

$$x^0 = 1$$
$$x^{y'} = (x^y) \cdot x$$

Beispiel: 5 + 3

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= x && (1)\\
x + y' &= (x + y)' && (2)
\end{aligned}
$$

$5 + 3$	Start
$= 5 + 2'$	Definition v. 3
$= (5 + 2)'$	Definition v. $+$, (2)
$= (5 + 1')'$	Definition v. 2
$= (5 + 1)''$	Definition v. $+$, (2)
$= (5 + 0')''$	Definition v. 1
$= (5 + 0)'''$	Definition v. $+$, (2)
$= 5'''$	Definition v. $+$, (1)
$= 6'' = 7' = 8$	Def. v. 6, 7, 8

Beispiel: 5!

$$0! = 1$$
$$(x')! = (x') \cdot x!$$

(Fakultät, Faktorielle: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$)

$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!$$
$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0!$$
$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= 120$$

Teilbarkeit, Primzahlen, deren Aufzählung

$x/y \equiv \exists z(z \leq x \wedge x = y \cdot z)$

x ist teilbar durch y. (Gödel Nr. 1)

$\mathrm{Prim}(x) \equiv \neg\exists z(z \leq x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge x/z) \wedge x > 1$

x ist Primzahl. (Gödel Nr. 2)

$0! \equiv 1$
$(n')! \equiv (n') \cdot n!$

Fakultät / Faktorielle (Gödel Nr. 4)

$Pr(0) \equiv 0$
$Pr(n') \equiv \varepsilon y\,(y \leq Pr(n)! + 1 \wedge \mathrm{Prim}(y) \wedge y > Pr(n))$

$Pr(n)$ ist die n-te Primzahl (der Größe nach). (Gödel Nr. 5)

Reihenglieder, Länge

$0\,Pr\,x \equiv 0$
$n'\,Pr\,x \equiv \varepsilon y\,(y \leq x \wedge \mathrm{Prim}(y) \wedge x/y \wedge y > n\,Pr\,x)$

$n\,Pr\,x$ ist die n-te (der Größe nach) in x enthaltene Primzahl. (Gödel Nr. 3, beachte Fn. 34a, S. 162)

$n\,Gl\,x \equiv \varepsilon y\,(y \leq x \wedge x/(n\,Pr\,x)^y \wedge \neg x/(n\,Pr\,x)^{y+1})$

$n\,Gl\,x$ ist das n-te Glied der der Zahl x zugeordneten Zahlenreihe (für $n > 0$ und nicht größer als die Länge dieser Reihe). (Gödel Nr. 6)

$l(x) \equiv \varepsilon y\,(y \leq x \wedge y\,Pr\,x > 0 \wedge (y+1)\,Pr\,x = 0)$

$l(x)$ ist die Länge der x zugeordneten Zahlenreihe. (Gödel Nr. 7)

Vorzeichenfunktion: signum

$$\mathrm{sgn}(0) = 0$$
$$\mathrm{sgn}(n') = 1$$

$$\mathrm{sgn}(0) = 0,\ \mathrm{sgn}(1) = 1,\ \mathrm{sgn}(2) = 1, \ldots$$

$$\overline{\mathrm{sgn}}(0) = 1$$
$$\overline{\mathrm{sgn}}(n') = 0$$

$$\overline{\mathrm{sgn}}(0) = 1,\ \overline{\mathrm{sgn}}(1) = 0,\ \overline{\mathrm{sgn}}(2) = 0, \ldots$$

Rekursive Relationen

Seien $R(x_1, \ldots, x_n)$, $S(y_1, \ldots, y_m)$ rekursive Relationen und die Funktionen r, s ihre charakteristischen Funktionen.

$\neg R(x_1, \ldots, x_n)$ wird repräsentiert durch:
$\overline{\mathrm{sgn}}(r(x_1, \ldots, x_n))$

$(R(x_1, \ldots, x_n) \wedge S(y_1, \ldots, y_m))$ wird repräsentiert durch:
$r(x_1, \ldots, x_n) + s(y_1, \ldots, y_m)$
oder: $\mathrm{sgn}(r(x_1, \ldots, x_n) + s(y_1, \ldots, y_m))$

$(R(x_1, \ldots, x_n) \vee S(y_1, \ldots, y_m))$ wird repräsentiert durch:
$r(x_1, \ldots, x_n) \cdot s(y_1, \ldots, y_m)$
oder: $\mathrm{sgn}(r(x_1, \ldots, x_n)) \cdot \mathrm{sgn}(s(y_1, \ldots, y_m))$

Und wozu das Ganze?

Wir werden mit rekursiv definierten Funktionen und Prädikaten allgemeine metamathematische Aussagen arithmetisieren können (singuläre Aussagen hatten wir schon).

Z.B. „Wenn etwas ein Beweis ist, dessen letzte Zeile ..., dann ....“

„Für alle x: Wenn x ein BEWEIS ist, und $l(x)$ Gl x ..., dann ....“

$\forall x((Bw(x) \wedge \ldots l(x)\ Gl\ x \ldots) \rightarrow \ldots)$

(für ‚Bw‘ vgl. Gödel Nr. 44.)

☞ Wir werden metamathematische Aussagen in gödelisierungsäquivalente arithmetische Aussagen überführen.

Inhalt

Algorithmentypen

- **Rekursivität** (Kurt Gödel, Stephen Cole Kleene). „Rekursiv“ nennt Gödel 1931 lediglich die primitiv-rekursiven Funktionen, die eine echte Unterklasse der allgemein-rekursiven Funktionen sind.
- **Turing-Berechenbarkeit** (Alan Turing, 1936). Unsere modernen Computer sind am ehesten endliche universelle Turing-Maschinen.
- **Definierbarkeit im Lambda-Kalkül** (Alonzo Church). Die exakte Formalisierung der Anwendung eines Funktionsausdrucks auf einen Argumentausdruck. Sehr abstrakt und daher zunächst etwas unanschaulich.
- **Abacus-Berechenbarkeit** (Joachim Lambek, 1961).
- . . . und noch einige andere.

Die Church-Turing-These

effektive Berechenbarkeit

=

Church-Turing-Berechenbarkeit

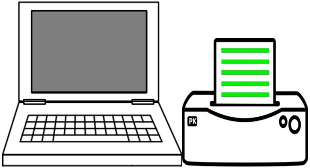
Die Church-Turing-These im Original

Alonzo Church über rekursive Definierbarkeit und Lambda-Definierbarkeit:

„The fact, however, that two such widely different and (in the opinion of the author) equally natural definitions of effective calculability turn out to be equivalent adds to the strength of the reasons adduced below for believing that they constitute as general a characterization of this notion as is consistent with the usual intuitive understanding of it.“ (Church 1936, S. 346)

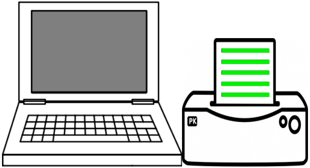
Inhalt

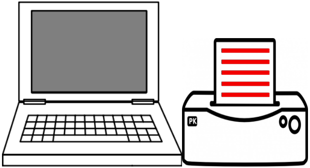
Aufzähler



Ein Aufzähler für eine rekursiv aufzählbare Menge.

Entscheider

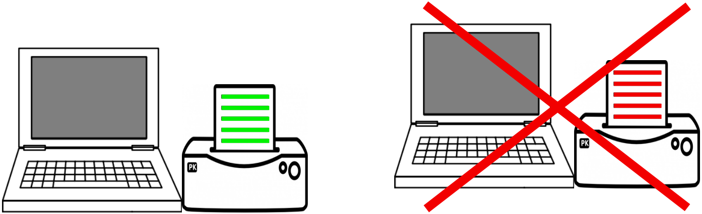




Eine Menge ist *entscheidbar* (auch: *rekursiv*) gdw. sowohl sie als auch ihr Komplement rekursiv aufzählbar sind.

☞ rekursiv $\neq$ rekursiv aufzählbar!

Semi-entscheidbar



Eine Menge ist *semi-entscheidbar* gdw. sie, aber *nicht* ihr Komplement rekursiv aufzählbar ist.

☞ Wir kennen eine solche Menge (bestens): die Menge aller gültigen Argumentformen der Prädikatenlogik (Alonzo Church, 1936).