Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Zwischenbilanz I

Michael Matzer

Version vom 04.04.2022, 12:18

Inhalt

Inhalt

Der Gödel-Satz in PM

Kurt Gödel, 1931: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*

Seien $A_1, \ldots, A_n$ die Axiome der *Principia Mathematica* (PM). Dann gibt es, sofern die PM widerspruchsfrei sind, mindestens einen PM-Satz B, sodass:

- $A_1, \ldots, A_n \nvdash_{PM} B$
- $A_1, \ldots, A_n \nvdash_{PM} \neg B$
- $A_1, \ldots, A_n \vDash_{PM} B$

Gödels Vorgehen

In der Sprache der Arithmetik einen Satz formulieren, der von sich selbst besagt, dass er nicht beweisbar ist.

Problem: Für die arithmetische Theorie einschlägige Sätze handeln von Zahlen, und nicht von logischen Zeichen und deren Zusammensetzung zu korrekten Beweisen — nicht von Metamathematik.

Lösung: Gödelisierung und Arithmetisierung der Metamathematik, d.i. das Überführen deutscher Aussagen über Zeichen, Zeichenreihen (Formeln) und Beweisen (Reihen von Formeln) in Aussagen über Zahlen.

Inhaltsübersicht

1. Historisch-systematische Einführung
2. Der Beweis im Detail
   1. Gödelisierung
   2. Arithmetisierung der Metamathematik / Syntax
   3. Repräsentierbarkeit
   4. Die „Gödel-Relation“ und „Gödels Trick“
3. Allgemeines über Diagonalbeweise
4. Bedeutung und Nicht-Bedeutung des Gödelschen Theorems

Inhalt

Gödelisierung

Jedem Zeichen, jeder Formel (Zeichenreihe) und jedem Beweis (d.h. jeder Reihe von Formeln) eineindeutig eine natürliche Zahl zuordnen.

Aussagen über Zeichen, Formeln und Beweise werden in Aussagen über natürliche Zahlen übergeführt.

Gödelisierungsäquivalenz: Ein deutscher Satz ist mit einem Satz der Arithmetik *gödelisierungsäquivalent* (*qua* eines zuvor vereinbarten Gödelisierungsschlüssels) gdw. die deutsche Aussage wahr ist gdw. die arithmetische Aussage wahr ist.

Arithmetisierung der Metamathematik

Deutsche Prädikate (Eigenschaften und Relationen) von Zeichen, Formeln und Beweisen durch arithmetische Prädikate ihrer Gödelzahlen repräsentieren.

☞ Hier kommt die Gödelisierungsäquivalenz ins Spiel.

Nicht vergessen: Kapitälchenschreibweise

Eine Bezeichnung in gewöhnlicher Schrift ist eine metamathematische Bezeichnung, eine Bezeichnung in KAPITÄLCHEN ist dessen Gödelzahl.

Z.B.

- Eine Variable ist Teil unseres Logiksystems.
- Eine VARIABLE ist eine (natürliche) Zahl.

Inhalt

Rekursive Funktionen

- Definition: primitiv-rekursive Funktion
- Beispiele aus Gödel

Damit können wir allgemeine Prädikate und Relationen über Zahlen (also in der Sprache der Arithmetik) formulieren, die wahr sind gdw. die entsprechenden deutschen Aussagen über die logischen Gebilde (Zeichen, Formeln und Beweise) wahr sind.

- Die Church-Turing-These
- Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit