Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Arithmetisierung der Metamathematik

Michael Matzer

Version vom 13.05.2022, 19:07

Inhalt

Inhalt

Verkettung, Reihe, Einklammern

$$x * y \equiv \varepsilon z \, (z \leq (Pr(l(x) + l(y)))^{x+y} \wedge$$
$$\forall n(n \leq l(x) \rightarrow n \, Gl \, z = n \, Gl \, x) \wedge$$
$$\forall n(0 < n \leq l(y) \rightarrow (n + l(x)) \, Gl \, z = n \, Gl \, y))$$

$x * y$ entspricht der Operation des „Aneinanderfügens“ zweier endlicher Zahlenreihen. (Gödel Nr. 8)

$$R(x) \equiv 2^x$$

$R(x)$ entspricht der nur aus der Zahl x bestehenden Zahlenreihe (für $x > 0$). (Gödel Nr. 9)

$$E(x) \equiv R(17) * x * R(19)$$

$E(x)$ entspricht der Operation des „Einklammerns“ (17 und 19 sind den Grundzeichen ‚(‘ und ‚)‘ zugeordnet). (Vgl. Gödel Nr. 10)

Verkettung, Reihe, Einklammern

$$
\begin{aligned}
x * y \equiv \varepsilon z\,(z \leq (Pr(l(x) + l(y)))^{x+y} \wedge \\
\quad \forall n(n \leq l(x) \rightarrow n \; Gl \; z = n \; Gl \; x) \wedge \\
\quad \forall n(0 < n \leq l(y) \rightarrow (n + l(x)) \; Gl \; z = n \; Gl \; y))
\end{aligned}
$$

$x * y$ entspricht der Operation des „Aneinanderfügens“ zweier endlicher Zahlenreihen. (Gödel Nr. 8)

$R(x) \equiv 2^x$

$R(x)$ entspricht der nur aus der Zahl x bestehenden Zahlenreihe (für $x > 0$). (Gödel Nr. 9)

$E(x) \equiv R(17) * x * R(19)$

$E(x)$ entspricht der Operation des „Einklammerns“ (17 und 19 sind den Grundzeichen ‚(‘ und ‚)‘ zugeordnet). (Vgl. Gödel Nr. 10)

Verkettung, Reihe, Einklammern

$$x * y \equiv \varepsilon z\,(z \leq (Pr(l(x)+l(y)))^{x+y} \wedge \\ \forall n(n \leq l(x) \rightarrow n\,Gl\,z = n\,Gl\,x) \wedge \\ \forall n(0 < n \leq l(y) \rightarrow (n + l(x))\,Gl\,z = n\,Gl\,y))$$

$x * y$ entspricht der Operation des „Aneinanderfügens“ zweier endlicher Zahlenreihen. (Gödel Nr. 8)

$$R(x) \equiv 2^x$$

$R(x)$ entspricht der nur aus der Zahl x bestehenden Zahlenreihe (für $x > 0$). (Gödel Nr. 9)

$$E(x) \equiv R(17) * x * R(19)$$

$E(x)$ entspricht der Operation des „Einklammerns“ (17 und 19 sind den Grundzeichen ‚(‘ und ‚)‘ zugeordnet). (Vgl. Gödel Nr. 10)

Inhalt

Terme und Prädikate

$\mathrm{Var}(x) \equiv \mathrm{Prim}(x) \wedge x > 23$

x ist eine VARIABLE. (Vgl. Gödel Nr. 12)

$\mathrm{Indiv}(x) \equiv \exists z(z \leq x \wedge \mathrm{Prim}(z) \wedge z > 23 \wedge x = z^2)$

x ist eine INDIVIDUENKONSTANTE.

$$\begin{aligned}\mathrm{Term}(x) \equiv\ & \mathrm{Var}(x) \vee \mathrm{Indiv}(x) \\ & \vee \exists z \exists w(z \leq x \wedge w \leq x \wedge \mathrm{Term}(z) \wedge \mathrm{Term}(w) \wedge \\ & (x = z * R(23) \vee x = E(z * R(25) * w) \\ & \vee x = E(z * R(27) * w)))\end{aligned}$$

x ist ein TERM.

$n\,\mathrm{Praed}\,x \equiv \exists z(z \leq x \wedge \mathrm{Prim}(z) \wedge z > 23 \wedge x = z^{n+2})$

x ist ein n-STELLIGES PRÄDIKAT.

Terme und Prädikate

$$\mathsf{Var}(x) \equiv \mathrm{Prim}(x) \wedge x > 23$$

x ist eine VARIABLE. (Vgl. Gödel Nr. 12)

$$\mathsf{Indiv}(x) \equiv \exists z(z \leq x \wedge \mathsf{Prim}(z) \wedge z > 23 \wedge x = z^2)$$

x ist eine INDIVIDUENKONSTANTE.

$$\begin{aligned} \mathsf{Term}(x) \equiv\ & \mathsf{Var}(x) \vee \mathsf{Indiv}(x) \\ & \vee \exists z \exists w(z \leq x \wedge w \leq x \wedge \mathsf{Term}(z) \wedge \mathsf{Term}(w) \wedge \\ & (x = z * R(23) \vee x = E(z * R(25) * w) \\ & \vee x = E(z * R(27) * w))) \end{aligned}$$

x ist ein TERM.

$$n\,\mathsf{Praed}\,x \equiv \exists z(z \leq x \wedge \mathsf{Prim}(z) \wedge z > 23 \wedge x = z^{n+2})$$

x ist ein n-STELLIGES PRÄDIKAT.

Terme und Prädikate

$\mathsf{Var}(x) \equiv \mathrm{Prim}(x) \wedge x > 23$

x ist eine VARIABLE. (Vgl. Gödel Nr. 12)

$\mathsf{Indiv}(x) \equiv \exists z(z \leq x \wedge \mathsf{Prim}(z) \wedge z > 23 \wedge x = z^2)$

x ist eine INDIVIDUENKONSTANTE.

$$\begin{aligned}\mathsf{Term}(x) \equiv{} & \mathsf{Var}(x) \vee \mathsf{Indiv}(x) \\ & \vee \exists z \exists w(z \leq x \wedge w \leq x \wedge \mathsf{Term}(z) \wedge \mathsf{Term}(w) \wedge \\ & (x = z * R(23) \vee x = E(z * R(25) * w) \\ & \vee x = E(z * R(27) * w)))\end{aligned}$$

x ist ein TERM.

$n\,\mathsf{Praed}\,x \equiv \exists z(z \leq x \wedge \mathsf{Prim}(z) \wedge z > 23 \wedge x = z^{n+2})$

x ist ein n-STELLIGES PRÄDIKAT.

Terme und Prädikate

$$\mathrm{Var}(x) \equiv \mathrm{Prim}(x) \wedge x > 23$$

x ist eine VARIABLE. (Vgl. Gödel Nr. 12)

$$\mathrm{Indiv}(x) \equiv \exists z (z \leq x \wedge \mathrm{Prim}(z) \wedge z > 23 \wedge x = z^2)$$

x ist eine INDIVIDUENKONSTANTE.

$$\begin{aligned}\mathrm{Term}(x) \equiv {} & \mathrm{Var}(x) \vee \mathrm{Indiv}(x) \\ & \vee \exists z \exists w (z \leq x \wedge w \leq x \wedge \mathrm{Term}(z) \wedge \mathrm{Term}(w) \wedge \\ & (x = z * R(23) \vee x = E(z * R(25) * w) \\ & \vee x = E(z * R(27) * w)))\end{aligned}$$

x ist ein TERM.

$$n \,\mathrm{Praed}\, x \equiv \exists z (z \leq x \wedge \mathrm{Prim}(z) \wedge z > 23 \wedge x = z^{n+2})$$

x ist ein n-STELLIGES PRÄDIKAT.

Besondere Terme: Zahlzeichen

$0\, N\, x \equiv x$
$n'\, N\, x \equiv (n\, N\, x) * R(23)$

$n\, N\, x$ entspricht der Operation: „n-maliges Nachsetzen des Zeichens ‚′‘ nach x“. (Vgl. Gödel Nr. 16)

$Z(n) \equiv n\, N\, R(29^2)$

das Zahlzeichen für die Zahl n. (Gödel Nr. 17)

Atomare Formeln

$$x \,\mathrm{TR}\, 1 \equiv \exists z(z \leq x \wedge \mathrm{Term}(z) \wedge x = R(z))$$
$$x \,\mathrm{TR}\, n' \equiv \exists z(z \leq x \wedge z \,\mathrm{TR}\, n \wedge \exists y(y \leq z \wedge \mathrm{Term}(y) \wedge x = z * R(21) * y))$$

x ist eine TERMENREIHE von n TERMEN (komma-separiert).

$$\mathrm{Atom}(x) \equiv \exists z \exists n(z \leq x \wedge n \leq x \wedge n \,\mathrm{Praed}\, z \wedge \exists y(y \leq x \wedge y \,\mathrm{TR}\, n \wedge x = z * E(y))) \vee \exists y \exists z(y \leq x \wedge z \leq x \wedge \mathrm{Term}(y) \wedge \mathrm{Term}(z) \wedge x = y * R(15) * z)$$

x ist eine ATOMARE FORMEL.

Atomare Formeln

$$x \,\mathrm{TR}\, 1 \equiv \exists z(z \leq x \wedge \mathrm{Term}(z) \wedge x = R(z))$$
$$x \,\mathrm{TR}\, n' \equiv \exists z(z \leq x \wedge z \,\mathrm{TR}\, n \wedge \exists y(y \leq z \wedge \mathrm{Term}(y) \wedge x = z * R(21) * y))$$

x ist eine TERMENREIHE von n TERMEN (komma-separiert).

$$\mathrm{Atom}(x) \equiv \exists z \exists n(z \leq x \wedge n \leq x \wedge n \,\mathrm{Praed}\, z \wedge \exists y(y \leq x \wedge y \,\mathrm{TR}\, n \wedge x = z * E(y))) \vee \exists y \exists z(y \leq x \wedge z \leq x \wedge \mathrm{Term}(y) \wedge \mathrm{Term}(z) \wedge x = y * R(15) * z)$$

x ist eine ATOMARE FORMEL.

Inhalt

Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen

$\text{Neg}(x) \equiv R(1) * x$

$\text{Neg}(x)$ ist die NEGATION von x. (Vgl. Gödel Nr. 13)

$x \operatorname{Con} y \equiv E(x * R(3) * y)$

$x \operatorname{Con} y$ ist die KONJUNKTION aus x und y. (Vgl. Gödel Nr. 14, 32)

$x \operatorname{Dis} y \equiv E(x * R(5) * y)$

$x \operatorname{Dis} y$ ist die DISJUNKTION aus x und y. (Vgl. Gödel Nr. 14)

Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen

$\mathrm{Neg}(x) \equiv R(1) * x$

$\mathrm{Neg}(x)$ ist die NEGATION von x. (Vgl. Gödel Nr. 13)

$x \,\mathrm{Con}\, y \equiv E(x * R(3) * y)$

$x \,\mathrm{Con}\, y$ ist die KONJUNKTION aus x und y. (Vgl. Gödel Nr. 14, 32)

$x \,\mathrm{Dis}\, y \equiv E(x * R(5) * y)$

$x \,\mathrm{Dis}\, y$ ist die DISJUNKTION aus x und y. (Vgl. Gödel Nr. 14)

Implikationsformeln, Äquivalenzformeln

$x \,\mathrm{Imp}\, y \equiv E(x * R(7) * y)$

$x \,\mathrm{Imp}\, y$ ist die Implikationsformel mit dem Vorderglied x und dem Nachglied y. (Vgl. Gödel Nr. 14, 32)

$x \,\mathrm{Aeq}\, y \equiv E(x * R(9) * y)$

$x \,\mathrm{Aeq}\, y$ ist die Äquivalenzformel aus x und y. (Vgl. Gödel Nr. 14, 32)

Quantifikationen

$x\,\mathrm{Gen}\,y \equiv R(11) * R(x) * y$

$x\,\mathrm{Gen}\,y$ ist die Generalisation von y mit der Variablen x (vorausgesetzt, dass x eine Variable ist), also die Allformel mit der Variablen x und dem Bereich des Quantoraudsrucks y. (Vgl. Gödel Nr. 15)

$x\,\mathrm{Ex}\,y \equiv R(13) * R(x) * y$

$x\,\mathrm{Ex}\,y$ ist die die Existenzformel mit der Variablen x und dem Bereich des Quantorausdrucks y (vorausgesetzt, dass x eine Variable ist). (Vgl. Gödel Nr. 15, 32)

Quantifikationen

$x \, \mathrm{Gen} \, y \equiv R(11) * R(x) * y$

$x \, \mathrm{Gen} \, y$ ist die GENERALISATION von y mit der VARIABLEN x (vorausgesetzt, dass x eine VARIABLE ist), also die ALLFORMEL mit der VARIABLEN x und dem BEREICH DES QUANTORAUDSRUCKS y. (Vgl. Gödel Nr. 15)

$x \, \mathrm{Ex} \, y \equiv R(13) * R(x) * y$

$x \, \mathrm{Ex} \, y$ ist die die EXISTENZFORMEL mit der VARIABLEN x und dem BEREICH DES QUANTORAUSDRUCKS y (vorausgesetzt, dass x eine VARIABLE ist). (Vgl. Gödel Nr. 15, 32)

Inhalt

Schrittweiser Aufbau von Formeln

$$Op(x, y, z) \equiv x = \mathrm{Neg}(y) \vee x = y \,\mathrm{Con}\, z \vee x = y \,\mathrm{Dis}\, z$$
$$\vee\, x = y \,\mathrm{Imp}\, z \vee x = y \,\mathrm{Aeq}\, z$$
$$\vee\, \exists v(v \leq x \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge (x = v \,\mathrm{Gen}\, y \vee x = v \,\mathrm{Ex}\, y))$$

x geht aus y (und evtl. z) durch eine der Operationen Konjunktion, Disjunktion, etc., oder Bildung einer Quantifikation hervor. (Vgl. Gödel Nr. 21)

$$\mathrm{FR}(x) \equiv \forall n(0 < n \leq l(x) \rightarrow (\mathrm{Atom}(n \,Gl\, x) \vee$$
$$\exists p \exists q(0 < p < n \wedge 0 < q < n \wedge$$
$$Op(n \,Gl\, x, p \,Gl\, x, q \,Gl\, x)))) \wedge l(x) > 0$$

x ist eine Reihe von FORMELN, deren jede entweder ATOMAR ist oder aus den vorhergehenden durch die obigen Operationen hervorgeht. (Vgl. Gödel Nr. 22)

Schrittweiser Aufbau von Formeln

$$
\begin{aligned}
Op(x,y,z) \equiv\ & x = \mathrm{Neg}(y) \lor x = y \,\mathrm{Con}\, z \lor x = y \,\mathrm{Dis}\, z \\
& \lor x = y \,\mathrm{Imp}\, z \lor x = y \,\mathrm{Aeq}\, z \\
& \lor \exists v (v \leq x \land \mathrm{Var}(v) \land (x = v \,\mathrm{Gen}\, y \lor x = v \,\mathrm{Ex}\, y))
\end{aligned}
$$

x geht aus y (und evtl. z) durch eine der Operationen Konjunktion, Disjunktion, etc., oder Bildung einer Quantifikation hervor. (Vgl. Gödel Nr. 21)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FR}(x) \equiv\ & \forall n (0 < n \leq l(x) \rightarrow (\mathrm{Atom}(n \,Gl\, x) \lor \\
& \exists p \exists q (0 < p < n \land 0 < q < n \land \\
& Op(n \,Gl\, x, p \,Gl\, x, q \,Gl\, x)))) \land l(x) > 0
\end{aligned}
$$

x ist eine Reihe von FORMELN, deren jede entweder ATOMAR ist oder aus den vorhergehenden durch die obigen Operationen hervorgeht. (Vgl. Gödel Nr. 22)

Allgemeines Prädikat *Formel*

$$\mathrm{Form}(x) \equiv \exists n(n \leq \mathrm{Pr}(l(x)^2)^{(x \cdot l(x))^2} \wedge FR(n)$$
$$\wedge\ x = l(n)\ Gl\ n)$$

x ist FORMEL (d.h. letztes Glied einer FORMELREIHE n). (Vgl. Gödel Nr. 23, beachte Fn. 35, S. 166)

Freie und gebundene Variablen (1)

$$
\begin{aligned}
v \,\mathrm{Geb}\, n, x \equiv{} & \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Form}(x) \\
& \wedge \exists a \exists b \exists c (a \leq x \wedge b \leq x \wedge c \leq x \wedge \\
& (x = a * v \,\mathrm{Gen}\, b * c \vee x = a * v \,\mathrm{Ex}\, b * c) \\
& \wedge \mathrm{Form}(b) \wedge l(a) + 1 \leq n \leq l(a) + l(v \,\mathrm{Gen}\, b))
\end{aligned}
$$

Die VARIABLE v ist in x an n-ter Stelle GEBUNDEN. (Gödel Nr. 24)

$$
\begin{aligned}
v \,\mathrm{Fr}\, n, x \equiv{} & \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Form}(x) \wedge \\
& n \leq l(x) \wedge \neg v \,\mathrm{Geb}\, n, x
\end{aligned}
$$

Die VARIABLE v ist in x an n-ter Stelle FREI. (Gödel Nr. 25)

Freie und gebundene Variablen (1)

$$\begin{aligned} v \,\mathrm{Geb}\, n, x \equiv\ & \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Form}(x) \\ & \wedge \exists a \exists b \exists c (a \le x \wedge b \le x \wedge c \le x \wedge \\ & (x = a * v \,\mathrm{Gen}\, b * c \vee x = a * v \,\mathrm{Ex}\, b * c) \\ & \wedge \mathrm{Form}(b) \wedge l(a) + 1 \le n \le l(a) + l(v \,\mathrm{Gen}\, b)) \end{aligned}$$

Die VARIABLE v ist in x an n-ter Stelle GEBUNDEN. (Gödel Nr. 24)

$$\begin{aligned} v \,\mathrm{Fr}\, n, x \equiv\ & \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Form}(x) \wedge \\ & n \le l(x) \wedge \neg v \,\mathrm{Geb}\, n, x \end{aligned}$$

Die VARIABLE v ist in x an n-ter Stelle FREI. (Gödel Nr. 25)

Freie und gebundene Variablen (2), Sätze

$v \operatorname{Fr} x \equiv \exists n(n \leq l(x) \wedge v \operatorname{Fr} n, x)$

v kommt in x als FREIE VARIABLE vor. (Gödel Nr. 26)

$\operatorname{Satz}(x) \equiv \operatorname{Form}(x) \wedge \neg\exists v(v \leq x \wedge \operatorname{Var}(v) \wedge v \operatorname{Fr} x)$

x ist ein SATZ. (Gödel: „Satzformel“)

Freie und gebundene Variablen (2), Sätze

$v \operatorname{Fr} x \equiv \exists n(n \leq l(x) \land v \operatorname{Fr} n, x)$

v kommt in x als FREIE VARIABLE vor. (Gödel Nr. 26)

$\mathrm{Satz}(x) \equiv \mathrm{Form}(x) \land \neg\exists v(v \leq x \land \mathrm{Var}(v) \land v \operatorname{Fr} x)$

x ist ein SATZ. (Gödel: „Satzformel“)

Inhalt

Substitution (Einsetzung)

Hier wird es bei Gödel sehr technisch (Gödel Nr. 27–30), darum lassen wir die Details.

Wir vermerken lediglich: $Sb(x, y, v)$, das Ergebnis der Substitution von y für v in x, ist eine rekursive Funktion. (Gödel Nr. 31)

- Wir schrieben in der Elementaren Logik für diese Substitution $x[y/v]$ oder $[x]y/v$ und sagten „x mit y für v“.
- Vgl. Gödel, Nr. 31; beachte Fn. 37; Erläuterung s. S. 152.

Intermission

Tief durchatmen.

Wir haben jetzt die Arithmetisierung der Syntax unseres Logiksystems.

Es folgt: die Arithmetisierung der Beweise der Arithmetik in dem System — teilweise auch nur schematisch, weil wir uns nicht allzu sehr mit technischen Details aufhalten wollen. (Wir hatten auch schon deren genug. ;-))

Inhalt

Axiome

$$\forall x \forall y (x' = y' \to x = y)$$

$$Ax_1(x) \equiv x = R(11) * R(29) * R(11) * R(31) * E(R(29) * R(23) * R(15) * R(31) * R(23) * R(7) * R(29) * R(15) * R(31))$$

$$\forall x \, \neg 0 = x'$$

$$Ax_2(x) \equiv x = R(11) * R(29) * R(1) * R(29^2) * R(15) * R(29) * R(23)$$

- ... in gleicher Weise für die Axiome 3–7. Das Prinzip ist ersichtlich.
- Vgl. Gödel Nr. 34

$$Ax(x) \equiv Ax_1(x) \lor Ax_2(x) \lor Ax_3(x) \lor Ax_4(x) \lor Ax_5(x) \lor Ax_6(x) \lor Ax_7(x)$$

x ist ein Axiom.

Axiome

$$\forall x \forall y (x' = y' \rightarrow x = y)$$

$$Ax_1(x) \equiv x = R(11) * R(29) * R(11) * R(31) * E(R(29) * R(23) * R(15) * R(31) * R(23) * R(7) * R(29) * R(15) * R(31))$$

$$\forall x \ \neg 0 = x'$$

$$Ax_2(x) \equiv x = R(11) * R(29) * R(1) * R(29^2) * R(15) * R(29) * R(23)$$

- ... in gleicher Weise für die Axiome 3–7. Das Prinzip ist ersichtlich.
- Vgl. Gödel Nr. 34

$$Ax(x) \equiv Ax_1(x) \vee Ax_2(x) \vee Ax_3(x) \vee Ax_4(x) \vee Ax_5(x) \vee Ax_6(x) \vee Ax_7(x)$$

x ist ein Axiom.

Axiome

$$\forall x \forall y (x' = y' \to x = y)$$

$$Ax_1(x) \equiv x = R(11) * R(29) * R(11) * R(31) * E(R(29) * R(23) * R(15) * R(31) * R(23) * R(7) * R(29) * R(15) * R(31))$$

$$\forall x \neg 0 = x'$$

$$Ax_2(x) \equiv x = R(11) * R(29) * R(1) * R(29^2) * R(15) * R(29) * R(23)$$

- ... in gleicher Weise für die Axiome 3–7. Das Prinzip ist ersichtlich.
- Vgl. Gödel Nr. 34

$$Ax(x) \equiv Ax_1(x) \vee Ax_2(x) \vee Ax_3(x) \vee Ax_4(x) \vee Ax_5(x) \vee Ax_6(x) \vee Ax_7(x)$$

x ist ein AXIOM.

Axiome

$$\forall x \forall y (x' = y' \to x = y)$$
$$Ax_1(x) \equiv x = R(11) * R(29) * R(11) * R(31) * E(R(29) * R(23) * R(15) * R(31) * R(23) * R(7) * R(29) * R(15) * R(31))$$

$$\forall x\ \neg 0 = x'$$
$$Ax_2(x) \equiv x = R(11) * R(29) * R(1) * R(29^2) * R(15) * R(29) * R(23)$$

- … in gleicher Weise für die Axiome 3–7. Das Prinzip ist ersichtlich.
- Vgl. Gödel Nr. 34

$$Ax(x) \equiv Ax_1(x) \lor Ax_2(x) \lor Ax_3(x) \lor Ax_4(x) \lor Ax_5(x) \lor Ax_6(x) \lor Ax_7(x)$$

x ist ein AXIOM.

Inhalt

Schlussregeln (Auszug, 1)

$\mathrm{MP}(x, y, z) \equiv z = y \,\mathrm{Imp}\, x$

x geht aus der IMPLIKATIONSFORMEL z und ihrem VORDERGLIED y gemäß Regel (MP), *modus ponens*, hervor.

$$\mathrm{MT}(x, y, z) \equiv \exists u \exists w (u \leq x \wedge w \leq y \\ \wedge x = \mathrm{Neg}(u) \wedge z = \mathrm{Neg}(w) \wedge y = u \,\mathrm{Imp}\, w)$$

Die NEGATIONSFORMEL x geht aus der IMPLIKATIONSFORMEL y und ihrem NEGIERTEN NACHGLIED z gemäß Regel (MT), *modus tollens*, hervor.

$\mathrm{DN1}(x, y, z) \equiv x = \mathrm{Neg}(\mathrm{Neg}(y))$

Die DOPPELTE NEGATION x geht aus y gemäß Regel (DN1), Einführung der doppelten Negation, hervor.

$\mathrm{DN2}(x, y, z) \equiv y = \mathrm{Neg}(\mathrm{Neg}(x))$

x geht aus der DOPPELTEN NEGATION x gemäß Regel (DN2), Beseitigung der doppelten Negation, hervor.

Schlussregeln (Auszug, 1)

$\mathrm{MP}(x, y, z) \equiv z = y \,\mathrm{Imp}\, x$

x geht aus der IMPLIKATIONSFORMEL z und ihrem VORDERGLIED y gemäß Regel (MP), *modus ponens*, hervor.

$$\mathrm{MT}(x, y, z) \equiv \exists u \exists w (u \leq x \wedge w \leq y \wedge x = \mathrm{Neg}(u) \wedge z = \mathrm{Neg}(w) \wedge y = u \,\mathrm{Imp}\, w)$$

Die NEGATIONSFORMEL x geht aus der IMPLIKATIONSFORMEL y und ihrem NEGIERTEN NACHGLIED z gemäß Regel (MT), *modus tollens*, hervor.

$\mathrm{DN1}(x, y, z) \equiv x = \mathrm{Neg}(\mathrm{Neg}(y))$

Die DOPPELTE NEGATION x geht aus y gemäß Regel (DN1), Einführung der doppelten Negation, hervor.

$\mathrm{DN2}(x, y, z) \equiv y = \mathrm{Neg}(\mathrm{Neg}(x))$

x geht aus der DOPPELTEN NEGATION x gemäß Regel (DN2), Beseitigung der doppelten Negation, hervor.

Schlussregeln (Auszug, 1)

$\mathrm{MP}(x, y, z) \equiv z = y \,\mathrm{Imp}\, x$

x geht aus der IMPLIKATIONSFORMEL z und ihrem VORDERGLIED y gemäß Regel (MP), *modus ponens*, hervor.

$$\mathrm{MT}(x, y, z) \equiv \exists u \exists w (u \leq x \land w \leq y \\ \land x = \mathrm{Neg}(u) \land z = \mathrm{Neg}(w) \land y = u \,\mathrm{Imp}\, w)$$

Die NEGATIONSFORMEL x geht aus der IMPLIKATIONSFORMEL y und ihrem NEGIERTEN NACHGLIED z gemäß Regel (MT), *modus tollens*, hervor.

$\mathrm{DN1}(x, y, z) \equiv x = \mathrm{Neg}(\mathrm{Neg}(y))$

Die DOPPELTE NEGATION x geht aus y gemäß Regel (DN1), Einführung der doppelten Negation, hervor.

$\mathrm{DN2}(x, y, z) \equiv y = \mathrm{Neg}(\mathrm{Neg}(x))$

x geht aus der DOPPELTEN NEGATION x gemäß Regel (DN2), Beseitigung der doppelten Negation, hervor.

Schlussregeln (Auszug, 1)

$\mathrm{MP}(x, y, z) \equiv z = y \,\mathrm{Imp}\, x$

x geht aus der IMPLIKATIONSFORMEL z und ihrem VORDERGLIED y gemäß Regel (MP), *modus ponens*, hervor.

$$\mathrm{MT}(x, y, z) \equiv \exists u \exists w (u \leq x \wedge w \leq y \\ \wedge x = \mathrm{Neg}(u) \wedge z = \mathrm{Neg}(w) \wedge y = u \,\mathrm{Imp}\, w)$$

Die NEGATIONSFORMEL x geht aus der IMPLIKATIONSFORMEL y und ihrem NEGIERTEN NACHGLIED z gemäß Regel (MT), *modus tollens*, hervor.

$\mathrm{DN1}(x, y, z) \equiv x = \mathrm{Neg}(\mathrm{Neg}(y))$

Die DOPPELTE NEGATION x geht aus y gemäß Regel (DN1), Einführung der doppelten Negation, hervor.

$\mathrm{DN2}(x, y, z) \equiv y = \mathrm{Neg}(\mathrm{Neg}(x))$

x geht aus der DOPPELTEN NEGATION x gemäß Regel (DN2), Beseitigung der doppelten Negation, hervor.

Schlussregeln (Auszug, 2)

$$\begin{aligned}\mathrm{UB}(x,y,z) \equiv \exists v \exists u \exists t (& v \leq x \wedge u \leq y \wedge t \leq x \\ & \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Term}(t) \\ & \wedge y = v \,\mathrm{Gen}\, u \wedge x = Sb(u,t,v))\end{aligned}$$

x geht aus der ALLFORMEL y gemäß Regel (UB), universelle Beseitigung, hervor.

$$\begin{aligned}\mathrm{EE}(x,y,z) \equiv \exists v \exists u \exists t (& v \leq x \wedge u \leq y \wedge t \leq x \\ & \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Term}(t) \\ & \wedge x = v \,\mathrm{Ex}\, u \wedge y = Sb(u,t,v))\end{aligned}$$

Die EXISTENZFORMEL x geht aus y gemäß Regel (EE), existenzielle Einführung, hervor.

Schlussregeln (Auszug, 2)

$$\begin{aligned}\mathrm{UB}(x,y,z) \equiv \exists v \exists u \exists t (& v \leq x \wedge u \leq y \wedge t \leq x \\ & \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Term}(t) \\ & \wedge y = v \,\mathrm{Gen}\, u \wedge x = Sb(u,t,v))\end{aligned}$$

x geht aus der ALLFORMEL y gemäß Regel (UB), universelle Beseitigung, hervor.

$$\begin{aligned}\mathrm{EE}(x,y,z) \equiv \exists v \exists u \exists t (& v \leq x \wedge u \leq y \wedge t \leq x \\ & \wedge \mathrm{Var}(v) \wedge \mathrm{Term}(t) \\ & \wedge x = v \,\mathrm{Ex}\, u \wedge y = Sb(u,t,v))\end{aligned}$$

Die EXISTENZFORMEL x geht aus y gemäß Regel (EE), existenzielle Einführung, hervor.

☞ Zum Nachdenken

Wie arithmetisieren wir ...

- ... die Variablenbedingungen für die Regeln (UE) und (EB)?
- ... die hypothetischen Ableitungen bei den Regeln (KB), (IB), (FU) und (EB)?

$\Rightarrow$ Axiomatische Kalküle eignen sich für Metabetrachtungen häufig besser, sind aber unhandlicher im „Alltagsgebrauch“.

Jedenfalls, schließlich ...

$$\begin{aligned} FI(x, y, z) \equiv\ & \mathrm{DN1}(x, y, z) \vee \mathrm{DN2}(x, y, z) \\ & \vee \mathrm{MP}(x, y, z) \vee \mathrm{MT}(x, y, z) \vee \dots \\ & \vee \mathrm{UB}(x, y, z) \vee \mathrm{EE}(x, y, z) \vee \dots \end{aligned}$$

x ist UNMITTELBARE FOLGE aus y und z. (Vgl. Gödel Nr.43)

☞ Wir haben jetzt einen Begriff des Ableitens arithmetischer Formeln *in der Sprache der Arithmetik*, der auf den Gödelzahlen (= Codes) der Formeln operiert. (!)

Inhalt

Showdown!

$$
\begin{aligned}
Bw(x) \equiv \forall n(0 < n \leq l(x) \rightarrow Ax(n\, Gl\, x) \vee \\
\quad \exists p \exists q(0 < p < n, 0 < q < n \\
\quad \wedge Fl(n\, Gl\, x, p\, Gl\, x, q\, Gl\, x))) \\
\quad \wedge\, l(x) > 0
\end{aligned}
$$

x ist eine Beweisfigur (eine endliche Folge von Formeln, deren jede entweder Axiom oder unmittelbare Folge aus zwei der vorhergehenden ist). (Vgl. Gödel Nr. 44)

$x\, B\, y \equiv Bw(x) \wedge l(x)\, Gl\, x = y$

x ist ein Beweis für die Formel y. (Gödel Nr. 45)

$\mathrm{Bew}(x) \equiv \exists y\; yBx$

x ist eine beweisbare Formel. (Gödel Nr. 46)

Showdown!

$$\begin{aligned} Bw(x) \equiv \forall n(0 < n \leq l(x) \rightarrow Ax(n\,Gl\,x) \vee \\ \exists p \exists q(0 < p < n, 0 < q < n \\ \wedge Fl(n\,Gl\,x, p\,Gl\,x, q\,Gl\,x))) \\ \wedge l(x) > 0 \end{aligned}$$

x ist eine BEWEISFIGUR (eine endliche Folge von FORMELN, deren jede entweder AXIOM oder UNMITTELBARE FOLGE aus zwei der vorhergehenden ist). (Vgl. Gödel Nr. 44)

$$x\,B\,y \equiv Bw(x) \wedge l(x)\,Gl\,x = y$$

x ist ein BEWEIS für die FORMEL y. (Gödel Nr. 45)

$$\text{Bew}(x) \equiv \exists y\; yBx$$

x ist eine BEWEISBARE FORMEL. (Gödel Nr. 46)

Showdown!

$$\begin{aligned} Bw(x) \equiv\ & \forall n(0 < n \leq l(x) \rightarrow Ax(n\, Gl\, x) \vee \\ & \quad \exists p \exists q(0 < p < n, 0 < q < n \\ & \quad \wedge Fl(n\, Gl\, x, p\, Gl\, x, q\, Gl\, x))) \\ & \quad \wedge l(x) > 0 \end{aligned}$$

x ist eine Beweisfigur (eine endliche Folge von Formeln, deren jede entweder Axiom oder unmittelbare Folge aus zwei der vorhergehenden ist). (Vgl. Gödel Nr. 44)

$$x\, B\, y \equiv Bw(x) \wedge l(x)\, Gl\, x = y$$

x ist ein Beweis für die Formel y. (Gödel Nr. 45)

$$\mathrm{Bew}(x) \equiv \exists y\; yBx$$

x ist eine beweisbare Formel. (Gödel Nr. 46)

Rekursivität und Entscheidbarkeit, nochmal

Für die Länge einer Formelreihe (vgl. Gödel Nr. 23) haben wir eine Abschätzung, für die Länge einer Beweisfigur nicht (vgl. Gödel Nr. 44–46). Deshalb ist die Eigenschaft, eine Formel zu sein, entscheidbar, aber die Eigenschaft, beweisbar zu sein, nicht!

Daher Gödels Anmerkung zu Nr. 46: „Bew(x) ist der einzige unter den Begriffen 1–46, von dem nicht behauptet werden kann, er sei rekursiv.“ (S. 170)

Heute würden wir sagen: Nr. 46 ist zwar rekursiv, aber (wegen der fehlenden oberen Schranke bei der Existenzquantifikation) nur *allgemein-rekursiv* und *nicht primitiv-rekursiv*.

Danke . . .

. . . für Ihre Geduld und Ihr Durchhaltevermögen!

Den dicksten Brocken technischer Details haben wir jetzt hinter uns. Komplizierter wird es in diesem Kurs nicht, das verspreche ich Ihnen. Und:

Wir haben jetzt ein *arithmetisches* Prädikat für Gödelzahlen (= Codes) beweisbarer arithmetischer Sätze. (!)

Inhalt

Ausblick

Mit unserem Prädikat Bew(x), „x ist eine BEWEISBARE FORMEL“, können wir nun einen Satz konstruieren, der von sich selbst besagt, dass er nicht beweisbar ist.

Dazu brauchen wir noch:

- die Repräsentierbarkeit entscheidbarer Relationen,
- die „Gödel-Relation“, sowie
- „Gödels Trick“.

(Die letzteren zwei werden in der Literatur nicht allgemein so genannt.)