Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Zwischenspiel: Eine rekursive Funktion, die nicht primitiv-rekursiv ist

Michael Matzer

Version vom 08.05.2022, 17:51

Inhalt

Definition

$$
\begin{aligned}
\psi(0,n) &= n' \\
\psi(m',0) &= \psi(m,1) \\
\psi(m',n') &= \psi(m,\psi(m',n))
\end{aligned}
$$

☞ Verschränkte Rekursion nach 2 Variablen (3. Zeile).

Expansionen der Rekursion und Wertetabelle

$$
\begin{aligned}
\psi(0, n) &= n' \\
\psi(m', 0) &= \psi(m, 1) \\
\psi(m', n') &= \psi(m, \psi(m', n))
\end{aligned}
$$

(Péter 1967, S. 106)

m	$\psi(m, n)$
0	$n + 1$
1	$2 + (n + 3) - 3 = n + 2$
2	$2 \cdot (n + 3) - 3 = 2 \cdot n + 3$
3	$2^{n+3} - 3$
4	$2 \uparrow\uparrow (n + 3) - 3$
5	$2 \uparrow\uparrow\uparrow (n + 3) - 3$

$\downarrow m \backslash n \rightarrow$	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	5	7	9
3	5	13	29	61
4	13	65533	$\approx 2{,}003 \cdot 10^{19728}$	$\psi(3, \psi(4, 2))$
5	65533	$\psi(4, 65533)$	$\vdots$	

Beweisidee, vgl. Hermes 1961, S. 85

Lemma. Zu jeder primitiv-rekursiven Funktion $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ gibt es eine Zahl c derart, dass für alle $n_1, n_2, \ldots, n_k$ gilt:

$$f(n_1, n_2, \ldots, n_k) < \psi(c, n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$$

Wäre nun die Péter-Funktion $\psi(m, n)$ primitiv-rekursiv, so auch die Funktion $f(n) = \psi(n, n)$. Dann gäbe es nach dem Lemma eine Konstante c derart, dass für alle n:

$$f(n) < \psi(c, n)$$

Dies gälte insbesondere für $n = c$. Damit hätte man den Widerspruch:

$$f(c) < \psi(c, c) = f(c)$$

Anmerkung, vgl. Hermes 1961, S. 85, Fn. 2

Man spricht bei diesem Beweis von einem „Diagonalverfahren“, da man die Werte der Funktion $\psi(m, n)$ auf der Diagonalen $m = n = c$ heranzieht.

☞ Mindestens ein Beweis dieser Art, also ein Diagonalbeweis, wird uns in diesem Kurs noch ganz wesentlich beschäftigen.

Literatur

Ackermann, Wilhelm: *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*, in: Mathematische Annalen 99 (1928), S. 118–133.

Hermes, Hans: *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Einführung in die Theorie der rekursiven Funktionen*, Berlin u.a. 1961 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete 109).

Péter, Rózsa: *Recursive Functions*, New York u.a., 3. Aufl. 1967.