

Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Repräsentierbarkeit und die „Gödel-Relation“

Michael Matzer

Inhalt

- 1 Repräsentierbarkeit
- 2 Zur Vorbereitung
- 3 Die „Gödel-Relation“
- 4 Ausblick

Inhalt

- 1 Repräsentierbarkeit
- 2 Zur Vorbereitung
- 3 Die „Gödel-Relation“
- 4 Ausblick

Entscheidbarkeit

Eine Relation ist *entscheidbar* gdw.

- in jedem Fall
- in endlich vielen Schritten
- rein mechanisch, nach einer Vorschrift,
- in Form einer Ja-/Nein-Antwort

ermittelt werden kann, ob die Relation zwischen den angeführten Termen besteht oder nicht.

Refresher: Jede primitiv-rekursive Relation ist entscheidbar.

Satz V, S. 170

Man kann zeigen: Wenn eine Relation R primitiv-rekursiv ist, dann gibt es eine Formel A in der Arithmetik, sodass für alle

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Wenn $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wahr ist, dann ist $A(Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n))$ ein Theorem der Arithmetik, und
- wenn $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ falsch ist, dann ist $\neg A(Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n))$ ein Theorem der Arithmetik.

Wir erinnern uns:

- ☞ $Z(x)$ ist das Zahlzeichen für für die Zahl x (Gödel Nr. 17).
- ☞ Ein Theorem ist eine Formel, die beweisbar ist.

Satz V, S. 170

Es gilt also:

- $R(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{Bew}(A(Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)))$
- $\neg R(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{Bew}(\text{Neg}(A(Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n))))$

(Gödel skizziert den Beweis lediglich, da er unproblematisch, aber umständlich ist.)

Beispiel

Sei die Relation $R(x, y)$, zweistellig: „ x ist das erste Zeichen der Reihe y .“

Dann ist die entsprechende arithmetische Formel: $x = 1 \text{ Gl } y$.

$$y/2^x \wedge \neg y/2^{x'}$$

$$\exists z(z \leq y \wedge y = 2^x \cdot z) \wedge \neg \exists z(z \leq y \wedge y = 2^{x'} \cdot z)$$

Beispiel (1) — Gödelisierungsäquivalenz

Die wahre Aussage „ x' ist das erste Zeichen der Reihe $,x = x''$ “ ist mit dem Theorem der Arithmetik (wobei g die vorhin ermittelte Gödelzahl der Reihe ist):

$\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{29} \cdot z) \wedge \neg \exists z(z \leq g \wedge g = 2^{30} \cdot z)$
gödelisierungsäquivalent.

☞ Erinnerung: D.h., die syntaktische Aussage ist wahr gdw. die arithmetische Aussage wahr ist aufgrund des vorab vereinbarten Gödelisierungsschlüssels.

Beispiel (2) — Gödelisierungsäquivalenz

Die falsche Aussage „, a ‘ ist das erste Zeichen der Reihe , $x = x$ ‘“ ist mit dem Theorem der Arithmetik (wobei g die vorhin ermittelte Gödelzahl der Reihe ist):

$$\neg(\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{961} \cdot z) \wedge \neg\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{962} \cdot z))$$

gödelisierungsäquivalent.

Die lange Formel ist logisch äquivalent mit:

$$\neg\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{961} \cdot z) \vee \neg\neg\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{962} \cdot z)$$

Wir überzeugen uns schnell semantisch: Das linke Disjunkt ist wahr. Und man kann in der Arithmetik beweisen, dass g nicht durch 961 teilbar ist.

Für das Weitere interessanter

$x B y$: x ist ein BEWEIS für die FORMEL y . (Gödel Nr. 45)

Entscheidungsverfahren:

- 1 Ist x eine BEWEISFIGUR? Wenn ja, dann weiter, sonst: **X**.
- 2 Ist y eine FORMEL? Wenn ja, dann weiter, sonst: **X**.
- 3 Ist y das letzte Glied von x ? Wenn ja, dann **✓**, sonst: **X**.

⇒ Die Relation B ist entscheidbar, also ist sie in der Arithmetik repräsentierbar.

Inhalt

- 1 Repräsentierbarkeit
- 2 Zur Vorbereitung
- 3 Die „Gödel-Relation“
- 4 Ausblick

Formeln mit einer freien Variablen: x

- $0 = x$
- $\neg 0 = x$
- $\exists y y = x'$
- $\exists y x = y'$
- usw.

☞ Wie alle Formeln, haben auch diese offenen Formeln eine Gödelzahl.

Substituieren für $x(0)$

Formel: $0 = x$

$0 = 0 \Rightarrow$ wahre Aussage

$0 = 0' \Rightarrow$ falsche Aussage

$0 = 0'' \Rightarrow$ falsche Aussage

$0 = 0''' \Rightarrow$ falsche Aussage

usw.

Substituieren für x (1)Formel: $0 = x$

$$\begin{array}{ccc} 0 & = & x \\ 29^2 & 15 & 29 \end{array}$$

 $g_1 := 2^{29^2} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$ (281 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer (des Zahlzeichens, Gödel Nr. 17) für g_1 für x in $,0 = x'$ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl g_1 (also die FORMEL g_1)
- mit der Ziffer für g_1
- für x ,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_1, Z(g_1), 29)$

Ergebnis: $0 = Z(g_1) \Rightarrow$ falsche Aussage

Substituieren für x (2)

Formel: $\neg 0 = x$

$$\neg \quad 0 \quad = \quad x \\ 1 \quad 29^2 \quad 15 \quad 29$$

$$g_2 := 2^1 \cdot 3^{29^2} \cdot 5^{15} \cdot 7^{29} \text{ (437 Dezimalstellen)}$$

Substituieren der Ziffer für g_2 für x in „ $\neg 0 = x$ “ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl g_2 (also die FORMEL g_2)
- mit der Ziffer für g_2
- für x ,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_2, Z(g_2), 29)$

Ergebnis: $\neg 0 = Z(g_2) \Rightarrow$ wahre Aussage

Substituieren für x (3)Formel: $\exists y x = y'$

$$\begin{array}{cccccc} \exists & y & x & = & y & ' \\ 13 & 31 & 29 & 15 & 31 & 23 \end{array}$$
 $g_3 := 2^{13} \cdot 3^{31} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{31} \cdot 13^{23}$ (110 Dezimalstellen)
Substituieren der Ziffer für g_3 für x in $\exists y x = y'$ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl g_3 (also die FORMEL g_3)
- mit der Ziffer für g_3
- für x ,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_3, Z(g_3), 29)$

Ergebnis: $\exists y Z(g_3) = y' \Rightarrow$ wahre Aussage

Nehmen wir mit

Kommt in einer Formel eine freie Variable vor, so kann man für diese

- jeden Term (eh klar, vgl. Elementare Logik),
- also auch jede Ziffer (jedes Zahlzeichen),
- und so insbesondere die Ziffer für die Gödelzahl der offenen Formel

substituieren.

(Wir beschränken uns im Folgenden für solche Substitutionen auf Formeln mit einer einzigen freien Variablen, x , das genügt.)

Inhalt

- 1 Repräsentierbarkeit
- 2 Zur Vorbereitung
- 3 Die „Gödel-Relation“**
- 4 Ausblick

Die „Gödel-Relation“

... wird in der Literatur nicht allgemein so genannt.

Die hier von uns so genannte „Gödel-Relation“ ist eine zweistellige arithmetische Relation, und sie besteht

- zwischen einem BEWEIS
- und einer OFFENEN FORMEL.

Die „Gödel-Relation“

 $y \text{ GR } x \equiv \dots$

$$y \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \dots \\ \text{---} \end{array} \right. \Leftarrow z$$

- y ist Gödelzahl eines Beweises
- z die Gödelzahl seiner letzten Zeile
- Die GESCHLOSSENE FORMEL z ist aus einer OFFENEN FORMEL x mit der FREIEN VARIABLEN 29 (d.i. x) entstanden, indem in ihr x , d.i. ihre Gödelzahl, für die VARIABLE 29 (d.i. x) substituiert wurde.

Die „Gödel-Relation“

$y \text{ GR } x \equiv \dots$

$y \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \dots \\ \text{---} \end{array} \right. \Leftarrow z$

$Bw(y)$

$y B z, z = I(y) G I y$

$z = Sb(x, Z(x), 29)$

kurz: $y \text{ GR } x \equiv y B Sb(x, Z(x), 29)$

Entscheidbarkeit der „Gödel-Relation“

$y \text{ GR } x \dots$

- 1 Ist y eine BEWEISFIGUR? Wenn ja, dann weiter, sonst: **X**.
 - 2 Ist x eine OFFENE FORMEL mit der FREIEN VARIABLEN x ?
Wenn ja, dann weiter, sonst: **X**.
 - 3 Ist $I(y) \text{ Gl } y = Sb(x, Z(x), 29)$? Wenn ja, dann **✓**, sonst: **X**.
- ☞ Die „Gödel-Relation“ ist entscheidbar und primitiv-rekursiv, daher ist sie in der Arithmetik *repräsentierbar*.

Repräsentierung der „Gödel-Relation“

Es gibt ein zweistelliges Relationszeichen R_G , sodass für alle $x, y \in \mathbb{N}$:

- Wenn $x GR y$, dann $\text{Bew}(R_G(Z(x), Z(y)))$
- Wenn $\neg x GR y$, dann $\text{Bew}(\text{Neg}(R_G(Z(x), Z(y))))$

☞ R_G repräsentiert die Gödel-Relation im formalen System der Arithmetik.

Inhalt

- 1 Repräsentierbarkeit
- 2 Zur Vorbereitung
- 3 Die „Gödel-Relation“
- 4 **Ausblick**

Wir sind beinahe fertig

Es wartet noch auf uns „Gödels Trick“ (der in der gängigen Literatur nicht so genannt wird), durch den wir den selbstbezüglichen Satz konstruieren, der seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet.