# Grenzen der Beweisbarkeit

## Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

## Repräsentierbarkeit und die „Gödel-Relation“

Michael Matzer

Version vom 24.06.2022, 18:02

# Inhalt

# Inhalt

# Entscheidbarkeit

Eine Relation ist *entscheidbar* gdw.

- in jedem Fall
- in endlich vielen Schritten
- rein mechanisch, nach einer Vorschrift,
- in Form einer Ja-/Nein-Antwort

ermittelt werden kann, ob die Relation zwischen den angeführten Termen besteht oder nicht.

Refresher: Jede primitiv-rekursive Relation ist entscheidbar.

# Satz V, S. 170

Man kann zeigen: Wenn eine Relation $R$ primitiv-rekursiv ist, dann gibt es eine Formel $A$ in der Arithmetik, sodass für alle $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Wenn $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wahr ist, dann ist $A(Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n))$ ein Theorem der Arithmetik, und
- wenn $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ falsch ist, dann ist $\neg A(Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n))$ ein Theorem der Arithmetik.

Wir erinnern uns:

☞ $Z(x)$ ist das Zahlzeichen für für die Zahl $x$ (Gödel Nr. 17).

☞ Ein Theorem ist eine Formel, die beweisbar ist.

# Satz V, S. 170

Es gilt also:

- $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \text{Bew}(A(Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n)))$
- $\neg R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \text{Bew}(Neg(A(Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n))))$

(Gödel skizziert den Beweis lediglich, da er unproblematisch, aber umständlich ist.)

# Beispiel

Sei die Relation $R(x, y)$, zweistellig: „$x$ ist das erste Zeichen der Reihe $y$.“

Dann ist die entsprechende arithmetische Formel: $x = 1\ Gl\ y$.

$y/2^x \wedge \neg y/2^{x'}$

$\exists z(z \leq y \wedge y = 2^x \cdot z) \wedge \neg\exists z(z \leq y \wedge y = 2^{x'} \cdot z)$

# Beispiel (1) — große Zahlen

Betrachten wir die Zeichenreihe: ‚$x = x$‘ (eine offene Formel).

Ihre Gödelzahl ist:
$2^{29} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29} = 1434890700000000000000000000000000000 =: g$.
Die Gödelzahl von ‚$x$‘ ist 29.

Es gilt also: $R(29, g)$.

Es gibt nun ein $z \leq g$, sodass:

- $g = 2^{29} \cdot z$ (nämlich $z = 2672692202031612396240234375$),
- aber es gibt kein $z \leq g$, sodass $g = 2^{30} \cdot z$.

Diese Existenzaussage ist in der Arithmetik beweisbar: ein Theorem der Arithmetik.

# Beispiel (1) — Gödelisierungsäquivalenz

Die wahre Aussage „‚$x$‘ ist das erste Zeichen der Reihe ‚$x = x$‘“ ist mit dem Theorem der Arithmetik (wobei $g$ die vorhin ermittelte Gödelzahl der Reihe ist):
$\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{29} \cdot z) \wedge \neg\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{30} \cdot z)$
*gödelisierungsäquivalent*.

☞ Erinnerung: D.h., die syntaktische Aussage ist wahr gdw. die arithmetische Aussage wahr ist aufgrund des vorab vereinbarten Gödelisierungsschlüssels.

# Beispiel (1) — ausgeschrieben

Ein Stück weiter ausgeschrieben lautet unser arithmetisches Theorem:

$$\exists z(z \leq 1434890700000000000000000000000000000 \wedge 1434890700000000000000000000000000000 = 2^{29} \cdot z) \wedge \neg\exists z(z \leq 1434890700000000000000000000000000000 \wedge 1434890700000000000000000000000000000 = 2^{30} \cdot z)$$

(Nicht handlich, nicht schön, nicht elegant und nicht besonders augenfreundlich, aber möglich.)

# Beispiel (2) — falsche Aussage

Betrachten wir wieder die Zeichenreihe: ‚$x = x$‘ (eine offene Formel).

Ihre Gödelzahl ist:
$2^{29} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29} = 1434890700000000000000000000000000000 =: g$.
Die Gödelzahl von ‚$a$‘ ist $31^2 = 961$.

Es gilt also nicht: $R(961, g)$, also gilt: $\neg R(961, g)$.

Es ist nun nicht der Fall, dass es ein $z \leq g$ gibt, sodass:

- $g = 2^{961} \cdot z$,
- aber es kein $z \leq g$ gibt, sodass $g = 2^{962} \cdot z$.

Diese Negation ist in der Arithmetik beweisbar: ein Theorem der Arithmetik.

# Beispiel (2) — Gödelisierungsäquivalenz

Die falsche Aussage „‚$a$‘ ist das erste Zeichen der Reihe ‚$x = x$‘“ ist mit dem Theorem der Arithmetik (wobei $g$ die vorhin ermittelte Gödelzahl der Reihe ist):
$\neg(\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{961} \cdot z) \wedge \neg\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{962} \cdot z))$
*gödelisierungsäquivalent*.

Die lange Formel ist logisch äquivalent mit:
$\neg\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{961} \cdot z) \vee \neg\neg\exists z(z \leq g \wedge g = 2^{962} \cdot z)$

Wir überzeugen uns schnell semantisch: Das linke Disjunkt ist wahr. Und man kann in der Arithmetik beweisen, dass $g$ nicht durch 961 teilbar ist.

# Für das Weitere interessanter

$x\,B\,y$: $x$ ist ein BEWEIS für die FORMEL $y$. (Gödel Nr. 45)

Entscheidungsverfahren:

1. Ist $x$ eine BEWEISFIGUR? Wenn ja, dann weiter, sonst: ✗.
2. Ist $y$ eine FORMEL? Wenn ja, dann weiter, sonst: ✗.
3. Ist $y$ das letzte Glied von $x$? Wenn ja, dann ✓, sonst: ✗.

$\Rightarrow$ Die Relation $B$ ist entscheidbar, also ist sie in der Arithmetik repräsentierbar.

# Inhalt

# Formeln mit einer freien Variablen: ‚$x$‘

- $0 = x$
- $\neg 0 = x$
- $\exists y\, y = x'$
- $\exists y\, x = y'$
- usw.

☞ Wie alle Formeln, haben auch diese offenen Formeln eine Gödelzahl.

# Substituieren für $x$ (0)

Formel: $0 = x$

$$\begin{array}{ll} 0 = 0 & \Rightarrow \text{wahre Aussage} \\ 0 = 0' & \Rightarrow \text{falsche Aussage} \\ 0 = 0'' & \Rightarrow \text{falsche Aussage} \\ 0 = 0''' & \Rightarrow \text{falsche Aussage} \end{array}$$

usw.

# Substituieren für $x$ (1)

Formel: $0 = x$

| $0$ | $=$ | $x$ |
|---|---|---|
| $29^2$ | 15 | 29 |

$g_1 := 2^{29^2} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$ (281 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer (des Zahlzeichens, Gödel Nr. 17) für $g_1$ für $x$ in ‚$0 = x$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_1$ (also die FORMEL $g_1$)
- mit der Ziffer für $g_1$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_1, Z(g_1), 29)$

Ergebnis: $0 = Z(g_1)$ $\Rightarrow$ falsche Aussage

# Substituieren für $x$ (1)

Formel: $0 = x$

| | | |
|---|---|---|
| $0$ | $=$ | $x$ |
| $29^2$ | $15$ | $29$ |

$g_1 := 2^{29^2} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$ (281 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer (des Zahlzeichens, Gödel Nr. 17) für $g_1$ für $x$ in ‚$0 = x$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_1$ (also die FORMEL $g_1$)
- mit der Ziffer für $g_1$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_1, Z(g_1), 29)$

Ergebnis: $0 = Z(g_1)$ $\Rightarrow$ falsche Aussage

# Substituieren für $x$ (1)

Formel: $0 = x$

| 0 | = | $x$ |
| --- | --- | --- |
| $29^2$ | 15 | 29 |

$g_1 := 2^{29^2} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$ (281 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer (des Zahlzeichens, Gödel Nr. 17) für $g_1$ für $x$ in ‚$0 = x$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_1$ (also die FORMEL $g_1$)
- mit der Ziffer für $g_1$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_1, Z(g_1), 29)$

Ergebnis: $0 = Z(g_1)$ $\Rightarrow$ falsche Aussage

# Substituieren für $x$ (1)

Formel: $0 = x$

| $0$ | $=$ | $x$ |
|---|---|---|
| $29^2$ | $15$ | $29$ |

$g_1 := 2^{29^2} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$ (281 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer (des Zahlzeichens, Gödel Nr. 17) für $g_1$ für $x$ in ‚$0 = x$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_1$ (also die FORMEL $g_1$)
- mit der Ziffer für $g_1$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_1, Z(g_1), 29)$

Ergebnis: $0 = Z(g_1)$ $\Rightarrow$ falsche Aussage

# Substituieren für $x$ (2)

Formel: $\neg 0 = x$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\neg$ | $0$ | $=$ | $x$ |
| 1 | $29^2$ | 15 | 29 |

$g_2 := 2^1 \cdot 3^{29^2} \cdot 5^{15} \cdot 7^{29}$ (437 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer für $g_2$ für $x$ in ‚$\neg 0 = x$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_2$ (also die FORMEL $g_2$)
- mit der Ziffer für $g_2$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_2, Z(g_2), 29)$

Ergebnis: $\neg 0 = Z(g_2)$ $\Rightarrow$ wahre Aussage

# Substituieren für $x$ (2)

Formel: $\neg 0 = x$

$$\begin{array}{cccc} \neg & 0 & = & x \\ 1 & 29^2 & 15 & 29 \end{array}$$

$g_2 := 2^1 \cdot 3^{29^2} \cdot 5^{15} \cdot 7^{29}$ (437 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer für $g_2$ für $x$ in ‚$\neg 0 = x$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_2$ (also die FORMEL $g_2$)
- mit der Ziffer für $g_2$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_2, Z(g_2), 29)$

Ergebnis: $\neg 0 = Z(g_2)$ $\Rightarrow$ wahre Aussage

# Substituieren für $x$ (2)

Formel: $\neg 0 = x$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\neg$ | $0$ | $=$ | $x$ |
| 1 | $29^2$ | 15 | 29 |

$g_2 := 2^1 \cdot 3^{29^2} \cdot 5^{15} \cdot 7^{29}$ (437 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer für $g_2$ für $x$ in ‚$\neg 0 = x$' ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_2$ (also die FORMEL $g_2$)
- mit der Ziffer für $g_2$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_2, Z(g_2), 29)$

Ergebnis: $\neg 0 = Z(g_2)$ $\Rightarrow$ wahre Aussage

# Substituieren für $x$ (2)

Formel: $\neg 0 = x$

| $\neg$ | $0$ | $=$ | $x$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $29^2$ | 15 | 29 |

$g_2 := 2^1 \cdot 3^{29^2} \cdot 5^{15} \cdot 7^{29}$ (437 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer für $g_2$ für $x$ in ‚$\neg 0 = x$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_2$ (also die FORMEL $g_2$)
- mit der Ziffer für $g_2$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_2, Z(g_2), 29)$

Ergebnis: $\neg 0 = Z(g_2)$ $\Rightarrow$ wahre Aussage

# Substituieren für $x$ (3)

Formel: $\exists y\, x = y'$

| $\exists$ | $y$ | $x$ | $=$ | $y$ | $'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 31 | 29 | 15 | 31 | 23 |

$g_3 := 2^{13} \cdot 3^{31} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{31} \cdot 13^{23}$ (110 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer für $g_3$ für $x$ in ‚$\exists y\, x = y'$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_3$ (also die FORMEL $g_3$)
- mit der Ziffer für $g_3$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_3, Z(g_3), 29)$

Ergebnis: $\exists y\, Z(g_3) = y'$ $\Rightarrow$ wahre Aussage

# Substituieren für $x$ (3)

Formel: $\exists y\, x = y'$

| $\exists$ | $y$ | $x$ | $=$ | $y$ | $'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 31 | 29 | 15 | 31 | 23 |

$g_3 := 2^{13} \cdot 3^{31} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{31} \cdot 13^{23}$ (110 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer für $g_3$ für $x$ in ‚$\exists y\, x = y'$' ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_3$ (also die FORMEL $g_3$)
- mit der Ziffer für $g_3$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_3, Z(g_3), 29)$

Ergebnis: $\exists y\, Z(g_3) = y'$ $\quad \Rightarrow$ wahre Aussage

# Substituieren für $x$ (3)

Formel: $\exists y\, x = y'$

| $\exists$ | $y$ | $x$ | $=$ | $y$ | $'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 31 | 29 | 15 | 31 | 23 |

$g_3 := 2^{13} \cdot 3^{31} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{31} \cdot 13^{23}$ (110 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer für $g_3$ für $x$ in ‚$\exists y\, x = y'$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_3$ (also die FORMEL $g_3$)
- mit der Ziffer für $g_3$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_3, Z(g_3), 29)$

Ergebnis: $\exists y\, Z(g_3) = y'$ $\Rightarrow$ wahre Aussage

# Substituieren für $x$ (3)

Formel: $\exists y\, x = y'$

| $\exists$ | $y$ | $x$ | $=$ | $y$ | $'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 31 | 29 | 15 | 31 | 23 |

$g_3 := 2^{13} \cdot 3^{31} \cdot 5^{29} \cdot 7^{15} \cdot 11^{31} \cdot 13^{23}$ (110 Dezimalstellen)

Substituieren der Ziffer für $g_3$ für $x$ in ‚$\exists y\, x = y'$‘ ergibt

- die Formel mit der Gödelzahl $g_3$ (also die FORMEL $g_3$)
- mit der Ziffer für $g_3$
- für $x$,
- d.i. die FORMEL $Sb(g_3, Z(g_3), 29)$

Ergebnis: $\exists y\, Z(g_3) = y' \quad \Rightarrow$ wahre Aussage

# Nehmen wir mit

Kommt in einer Formel eine freie Variable vor, so kann man für diese

- jeden Term (eh klar, vgl. Elementare Logik),
- also auch jede Ziffer (jedes Zahlzeichen),
- und so insbesondere die Ziffer für die Gödelzahl der offenen Formel

substituieren.

(Wir beschränken uns im Folgenden für solche Substitutionen auf Formeln mit einer einzigen freien Variablen, ‚$x$‘, das genügt.)

# Inhalt

# Die „Gödel-Relation“

… wird in der Literatur nicht allgemein so genannt.

Die hier von uns so genannte „Gödel-Relation“ ist eine zweistellige arithmetische Relation, und sie besteht

- zwischen einem Beweis
- und einer offenen Formel.

# Die „Gödel-Relation“

$y \, \mathrm{GR} \, x \equiv \ldots$

$$y \left\{ \begin{array}{l} \text{— — — — —} \\ \text{— — — — —} \\ \text{— — — — —} \\ \ldots \\ \text{— — — — —} \qquad \Leftarrow \qquad \mathrm{z} \end{array} \right.$$

- $y$ ist Gödelzahl eines Beweises
- $z$ die Gödelzahl seiner letzten Zeile
- Die geschlossene Formel $z$ ist aus einer offenen Formel $x$ mit der freien Variablen 29 (d.i. $x$) entstanden, indem in ihr $x$, d.i. ihre Gödelzahl, für die Variable 29 (d.i. $x$) substituiert wurde.

# Die „Gödel-Relation“

$y \, \mathrm{GR} \, x \equiv \ldots$

$$y \left\{ \begin{array}{lll} \text{— — — — —} & & \\ \text{— — — — —} & & \\ \text{— — — — —} & & \\ \ldots & & \\ \text{— — — — —} & \Leftarrow & \mathrm{z} \end{array} \right.$$

$Bw(y)$
$y \, B \, z, z = l(y) \, Gl \, y$
$z = Sb(x, Z(x), 29)$

kurz: $y \, \mathrm{GR} \, x \equiv y \, B \, Sb(x, Z(x), 29)$

# Entscheidbarkeit der „Gödel-Relation“

$y \, \mathrm{GR} \, x \ldots$

1. Ist $y$ eine BEWEISFIGUR? Wenn ja, dann weiter, sonst: ✗.
2. Ist $x$ eine OFFENE FORMEL mit der FREIEN VARIABLEN $x$? Wenn ja, dann weiter, sonst: ✗.
3. Ist $l(y) \; Gl \; y = Sb(x, Z(x), 29)$? Wenn ja, dann ✓, sonst: ✗.

☞ Die „Gödel-Relation“ ist entscheidbar und primitiv-rekursiv, daher ist sie in der Arithmetik *repräsentierbar*.

# Repräsenstierung der „Gödel-Relation“

Es gibt ein zweistelliges Relationszeichen $R_G$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{N}$:

- Wenn $x \, \mathrm{GR} \, y$, dann $\mathrm{Bew}(R_G(Z(x), Z(y)))$
- Wenn $\neg x \, \mathrm{GR} \, y$, dann $\mathrm{Bew}(\mathrm{Neg}(R_G(Z(x), Z(y))))$

☞ $R_G$ repräsentiert die Gödel-Relation im formalen System der Arithmetik.

# Inhalt

# Wir sind beinahe fertig

Es wartet noch auf uns „Gödels Trick“ (der in der gängigen Literatur nicht so genannt wird), durch den wir den selbstbezüglichen Satz konstruieren, der seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet.