Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

„Gödels Trick“

Michael Matzer

Version vom 24.06.2022, 18:03

Inhalt

Inhalt

Die „Gödel-Relation“

$y \, R_G \, x$

$\neg \exists y \; y \, R_G \, x$

„Es gibt keinen Beweis für die Formel, die ensteht, wenn in die OFFENE FORMEL x die Ziffer für ihre eigene Gödelzahl für die Variable x eingesetzt wird.“

☞ Das ist eine offene Formel mit der freien Variablen x.

Die „Gödel-Relation“

$y \; R_G \; x$

$\neg \exists y \; y \; R_G \; x$

„Es gibt keinen Beweis für die Formel, die ensteht, wenn in die OFFENE FORMEL x die Ziffer für ihre eigene Gödelzahl für die Variable x eingesetzt wird.“

☞ Das ist eine offene Formel mit der freien Variablen x.

Die „Gödel-Relation“

$y \, R_G \, x$

$\neg \exists y \; y \, R_G \, x$

„Es gibt keinen Beweis für die Formel, die ensteht, wenn in die OFFENE FORMEL x die Ziffer für ihre eigene Gödelzahl für die Variable x eingesetzt wird.“

☞ Das ist eine offene Formel mit der freien Variablen x.

Einsetzen der Gödelzahl

Die Formel

$\neg \exists y \; y \; R_G \; x$

hat eine Gödelzahl. Sei diese Zahl g.

Wir bilden das Ergebnis der Substitution
$[\neg \exists y \; y \; R_G \; x] \; Z(g)/x$
und erhalten:
$\neg \exists y \; y \; R_G \; Z(g)$

„Es gibt keinen Beweis für die Formel, die ensteht, wenn in die OFFENE FORMEL g die Ziffer für ihre eigene Gödelzahl für die Variable x eingesetzt wird.“

Der „Gödelsatz“

$\neg\exists y\, y\, R_G\, Z(g)$

„Es gibt keinen Beweis für die Formel, die ensteht, wenn in die OFFENE FORMEL g die Ziffer für ihre eigene Gödelzahl für die Variable x eingesetzt wird.“

$\Rightarrow$ Die Formel mit der Gödelzahl g ist: $\neg\exists y\, y\, R_G\, x$. Hier setzen wir $Z(g)$ für x ein und bekommen: $\neg\exists y\, y\, R_G\, Z(g)$. (Diese Formel wird häufig als „der Gödelsatz“ bezeichnet.)

Die Formel behauptet also (via Gödelisierungsäquivalenz), dass sie unbeweisbar ist.

Der „Gödelsatz“

$\neg\exists y\, y\, R_G\, Z(g)$

„Es gibt keinen Beweis für die Formel, die ensteht, wenn in die OFFENE FORMEL g die Ziffer für ihre eigene Gödelzahl für die Variable x eingesetzt wird.“

$\Rightarrow$ Die Formel mit der Gödelzahl g ist: $\neg\exists y\, y\, R_G\, x$. Hier setzen wir $Z(g)$ für x ein und bekommen: $\neg\exists y\, y\, R_G\, Z(g)$. (Diese Formel wird häufig als „der Gödelsatz“ bezeichnet.)

Die Formel behauptet also (via Gödelisierungsäquivalenz), dass sie unbeweisbar ist.

Der „Gödelsatz“

$\neg\exists y\; y\, R_G\, Z(g)$

„Es gibt keinen Beweis für die Formel, die ensteht, wenn in die OFFENE FORMEL g die Ziffer für ihre eigene Gödelzahl für die Variable x eingesetzt wird.“

$\Rightarrow$ Die Formel mit der Gödelzahl g ist: $\neg\exists y\; y\, R_G\, x$. Hier setzen wir $Z(g)$ für x ein und bekommen: $\neg\exists y\; y\, R_G\, Z(g)$. (Diese Formel wird häufig als „der Gödelsatz“ bezeichnet.)

Die Formel behauptet also (via Gödelisierungsäquivalenz), dass sie unbeweisbar ist.

Inhalt

Unentscheidbarkeit des Gödelsatzes

Halten wir fest:

$$[\underbrace{\neg\exists y\, y\, R_G\, x}_{g}]\, Z(g)/x = \neg\exists y\, y\, R_G\, Z(g)$$

☞ Das Ergebnis dieser Substitution hat wieder eine Gödelzahl. Sei k diese Zahl. (k ist also die Gödelzahl des Gödelsatzes.)

Unentscheidbarkeit des Gödelsatzes

Halten wir fest:

$$[\underbrace{\neg\exists y\ y\ R_G\ x}_{g}]\ Z(g)/x = \neg\exists y\ y\ R_G\ Z(g)$$

☞ Das Ergebnis dieser Substitution hat wieder eine Gödelzahl. Sei k diese Zahl. (k ist also die Gödelzahl des Gödelsatzes.)

Der Gödelsatz ist nicht beweisbar

$$\underbrace{[\neg\exists y\, y\, R_G\, x]}_{g}\, Z(g)/x = \underbrace{\neg\exists y\, y\, R_G\, Z(g)}_{k}$$

Beweis:

1. * $\mathrm{Bew}(k)$
2. $k = Sb(g, Z(g), 29)$ ist beweisbar.
3. $\exists y\, y\, B\, (Sb(g, Z(g), 29))$
4. $\exists y\, y\, R_G\, Z(g)$ ist beweisbar.
5. $\mathrm{Bew}(\mathrm{Neg}(k))$

$\lightning$

Die Negation des Gödelsatzes ist nicht beweisbar

$$\underbrace{[\neg\exists y\; y\, R_G\, x]}_{g}\, Z(g)/x = \underbrace{\neg\exists y\; y\, R_G\, Z(g)}_{k}$$

Beweis:

1. * $\mathrm{Bew}(\mathrm{Neg}(k))$
2. Sei x die Gödelzahl des Beweises für $\mathrm{Neg}(k)$: $x\, B\, \mathrm{Neg}(k)$.
3. Dann ist beweisbar: $\neg\forall y \neg\, y\, B\, \mathrm{Neg}(k)$.
4. $\neg\mathrm{Bew}(k)$
5. Keine Zahl $x \in \mathbb{N}$ ist so, dass $x\, B\, k$.
6. Es ist also beweisbar: $\neg 0\, B\, k$, $\neg 0'\, B\, k$, $\neg 0''\, B\, k$, etc.

$\lightning$ (ω)

Zur ω-Widersprüchlichkeit

Ein System ist *ω-widersprüchlich*, wenn in ihm sowohl

- $\neg\forall x F(x)$, als auch
- $F(t_1)$, $F(t_2)$, $F(t_3)$, usw., für alle Terme $t_{\dots}$,

beweisbar sind.

Beispiel: Sei g die Gödelzahl der Formel ‚$0 = 0'$', d.i. $3,92711610289318441080487101 \cdot 10^{867}$.
Die Axiome der Arithmetik zusammen mit der Formel Bew(g), die behauptet, dass $0 = 0' = 1$ beweisbar ist, sind zwar nicht einfach widersprüchlich, aber ω-widersprüchlich.
Denn dann sind beweisbar: $\exists x\, x\, B\, g$, aber auch $\neg 0\, B\, g$, $\neg 0'\, B\, g$, $\neg 0''\, B\, g$, etc.

ω-Widersprüchlichkeit impliziert nicht einfache Widersprüchlichkeit. (Umgekehrt aber schon.)

Zur ω-Widersprüchlichkeit

Ein System ist *ω-widersprüchlich*, wenn in ihm sowohl

- $\neg\forall x F(x)$, als auch
- $F(t_1)$, $F(t_2)$, $F(t_3)$, usw., für alle Terme $t_{\dots}$,

beweisbar sind.

Beispiel: Sei g die Gödelzahl der Formel ‚$0 = 0'$', d.i. $3{,}9271161028931844108048 7101 \cdot 10^{867}$.
Die Axiome der Arithmetik zusammen mit der Formel $\mathrm{Bew}(g)$, die behauptet, dass $0 = 0' = 1$ beweisbar ist, sind zwar nicht einfach widersprüchlich, aber ω-widersprüchlich.
Denn dann sind beweisbar: $\exists x\, x\, B\, g$, aber auch $\neg 0\, B\, g$, $\neg 0'\, B\, g$, $\neg 0''\, B\, g$, etc.

ω-Widersprüchlichkeit impliziert nicht einfache Widersprüchlichkeit. (Umgekehrt aber schon.)

Zur ω-Widersprüchlichkeit

Ein System ist *ω-widersprüchlich*, wenn in ihm sowohl

- $\neg\forall x F(x)$, als auch
- $F(t_1)$, $F(t_2)$, $F(t_3)$, usw., für alle Terme $t_{\ldots}$,

beweisbar sind.

Beispiel: Sei g die Gödelzahl der Formel ‚$0 = 0'$', d.i. $3,92711610289318441080487101 \cdot 10^{867}$.
Die Axiome der Arithmetik zusammen mit der Formel $\mathrm{Bew}(g)$, die behauptet, dass $0 = 0' = 1$ beweisbar ist, sind zwar nicht einfach widersprüchlich, aber ω-widersprüchlich.
Denn dann sind beweisbar: $\exists x\, x\, B\, g$, aber auch $\neg 0\, B\, g$, $\neg 0'\, B\, g$, $\neg 0''\, B\, g$, etc.

ω-Widersprüchlichkeit impliziert nicht einfache Widersprüchlichkeit. (Umgekehrt aber schon.)

Inhalt

Wahrheit des Gödelsatzes in der Arithmetik

Es ist unmittelbar einsehbar: Der Gödelsatz ist *wahr*.

Es verhält sich also so, wie er besagt: Es gibt für ihn keinen Beweis.

Denn wäre er falsch, so wäre er beweisbar und falsch: Die Arithmetik wäre *inkorrekt*.

Gödel: „Der *im System [der Arithmetik]* unentscheidbare Satz wurde also durch metamathematische Überlegungen doch entschieden.“ (S. 150, Hervorh. i. Orig.)

Konsequenz

Es gibt also in der Arithmetik einen

- einschlägigen,
- wahren Satz,
- der in ihrem formalen System nicht beweisbar ist.

Resultat

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz (Satz VI, S. 172):

> Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist,
> dann ist sie unvollständig.

John Barkley Rosser, 1936

ω-Widersprüchlichkeit in Gödels Beweis zur einfachen Widersprüchlichkeit abgeschwächt.

„Wesentlich unvollständig“

Die Arithmetik ist *wesentlich unvollständig*: Wenn man weitere, neue Axiome einführt, die den Gödelsatz beweisbar werden lassen, dann ist mit der gezeigten Methode unmittelbar ein neuer Gödelsatz konstruierbar.

(... oder es resultiert ein widersprüchliches System. Aber das wollen wir unter allen Umständen vermeiden!)