

Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Diagonalverfahren, Diagonalbeweise

Michael Matzer

Version vom 27.06.2022, 13:38

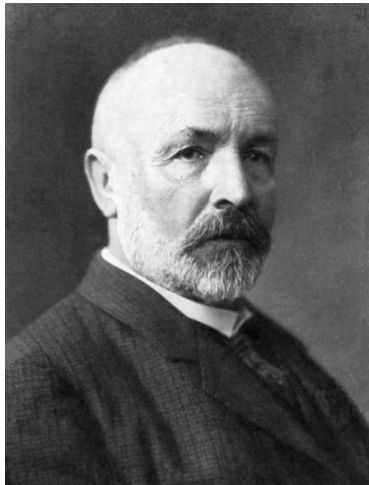
Inhalt

- 1 Cantor
- 2 Diagonalparadoxa
- 3 Tentative Lösungen

Inhalt

- 1 Cantor
- 2 Diagonalparadoxa
- 3 Tentative Lösungen

Georg Cantor (1845–1918)



Mehr als unendlich viele ... ?

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen,

„gleich viele“ rationale Zahlen (!),

aber „mehr“ reelle Zahlen. (!)

Mehr als unendlich viele ... ?

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen,

„gleich viele“ rationale Zahlen (!),

aber „mehr“ reelle Zahlen. (!)

Mehr als unendlich viele ... ?

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen,

„gleich viele“ rationale Zahlen (!),

aber „mehr“ reelle Zahlen. (!)

An Ode to Modesty



Talking of successful rackets
modesty deserves a mention.
Exclamation marks in brackets
never fail to draw attention.

Piet Hein, *Grooks*. With the assistance of Jens Arup, Garden City (N.Y.):
Doubleday & Company 1969, S. 47.

Gleichmächtigkeit

$$1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, \dots$$

$$1-1, 1-2, 1-3, \dots$$

$$(1 \text{ } 1) (1 \text{ } 2) (1 \text{ } 3) (1 \text{ } 4) \dots$$

Zwei Mengen sind *gleichmächtig* gdw. es eine 1:1-Abbildung (eine „bijektive“ Abbildung) zwischen ihnen gibt.

Gleichmächtigkeit

$$1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, \dots$$

$$1-1, 1-2, 1-3, \dots$$

$$(1\ 1) (1\ 1) (1\ 1) (1\ 1) \dots$$

Zwei Mengen sind *gleichmächtig* gdw. es eine 1:1-Abbildung (eine „bijektive“ Abbildung) zwischen ihnen gibt.

Gleichmächtigkeit

$$1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, \dots$$

$$1-1, 1-2, 1-3, \dots$$

$$(1\ 1) (1\ 1) (1\ 1) (1\ 1) \dots$$

Zwei Mengen sind *gleichmächtig* gdw. es eine 1:1-Abbildung (eine „bijektive“ Abbildung) zwischen ihnen gibt.

Beispiel 1

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$$

Abbildung:

$$f : A \rightarrow B$$

$$1 \mapsto a$$

$$2 \mapsto b$$

$$3 \mapsto c$$

$\Rightarrow$ Die Mengen A und B sind *gleichmächtig*.

Beispiel 2

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$$

Abbildung:

$$f : A \rightarrow B$$

$$1 \mapsto a$$

$$2 \mapsto b$$

$$3 \mapsto \text{?}, \text{?}, \text{??}$$

$\Rightarrow$ Die Mengen A und B sind *nicht gleichmächtig*.

Beispiel 3

$$A = \mathbb{N}, B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\}$$

Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} f : A & \rightarrow & B \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 4 \\ 3 & \mapsto & 6 \\ \vdots & \mapsto & \vdots \end{array}$$

$\Rightarrow$ Die Mengen A und B sind *gleichmächtig*.

$\Rightarrow$ Es gibt „gleich viele“ gerade Zahlen wie natürliche Zahlen.

Rationale Zahlen

Es gibt „gleich viele“ rationale Zahlen wie natürliche Zahlen, d.h. die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig.

Wir treten den Beweis an.

„Erstes“ Cantorsches Diagonalverfahren

	1	2	3	4	5	...
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	...
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	...
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	...
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	...
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Aufzählung: $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, 5, \dots$

⇒ Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind *gleichmächtig*.

⇒ Es gibt „gleich viele“ rationale Zahlen wie natürliche Zahlen.

„Erstes“ Cantorsches Diagonalverfahren

	1	2	3	4	5	...
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	...
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	...
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	...
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	...
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Aufzählung: $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, 5, \dots$

⇒ Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind *gleichmächtig*.

⇒ Es gibt „gleich viele“ rationale Zahlen wie natürliche Zahlen.

Reelle Zahlen

Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind *nicht* gleichmächtig; in einem gewissen Sinn gibt es „mehr“ reelle Zahlen als natürliche Zahlen.

Wir treten den Beweis an.

[Zweites] Cantorsches Diagonalverfahren

Annahme einer mit den natürlichen Zahlen nummerierbaren Liste der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, das genügt hier.

1.) 0, ...

2.) 0, ...

3.) 0, ...

4.) 0, ...

5.) 0, ...

⋮ ⋮

$n.$) 0, ...

Meine Zahl: 0, ...

Unendlichkeit(en?)

Für unendliche Mengen M gilt:

- M heißt *abzählbar (unendlich)* gdw. es eine 1:1-Abbildung (eine bijektive Abbildung) von M auf die Menge der natürlichen Zahlen gibt.
- Sonst heißt M *überabzählbar (unendlich)*.

Wir haben also gefunden:

- $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind *abzählbar unendlich*.
- $\mathbb{R}$ ist *überabzählbar unendlich*.

Unendlichkeit(en?)

Für unendliche Mengen M gilt:

- M heißt *abzählbar (unendlich)* gdw. es eine 1:1-Abbildung (eine bijektive Abbildung) von M auf die Menge der natürlichen Zahlen gibt.
- Sonst heißt M *überabzählbar (unendlich)*.

Wir haben also gefunden:

- $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind *abzählbar unendlich*.
- $\mathbb{R}$ ist *überabzählbar unendlich*.

A Moment's Thought



As eternity
is reckoned
there's a lifetime
in a second.

Piet Hein, *Grooks*. With the assistance of Jens Arup, Garden City (N.Y.):
Doubleday & Company 1969, S. 52.

Self-non-application

„komplementierende Selbstanwendung“ (schlechte Übers. M.M.)

„I. Es muss eine *Selbstanwendung* geben, wobei die Bedeutung eines Elements in einer Anordnung einen Term einschließt, der sich spezifisch auf sich selbst bezieht.“ (S. 67, Übers. M.M., Hervorh. i. Orig.)

„II. Es muss in einem Selbstanwendungsausdruck, der Bedingung I erfüllt, eine *Abänderung, Leugnung, interne Negation* oder *Komplementbildung eines Terms, Prädikats* oder *Satzes* geben.“ (S. 70, übers. M.M., Hervorh. i. Orig.)

Dale Jacquette: *Diagonalization in Logic and Mathematics*, in: *Handbook of Philosophical Logic. 2nd Edition*, Bd. 11, hg. von D. M. Gabbay u. F. Guenther, Dordrecht u.a. 2004, S. 55–147.

Inhalt

- 1 Cantor
- 2 Diagonalparadoxa
- 3 Tentative Lösungen

Der Barbier

In einem Dorf gibt es einen Barbier, der all jene rasiert, die sich selbst nicht rasieren.

■☞ Rasiert der Barbier sich selbst?

Der Lügner

Der einzige Satz in diesem Rechteck ist falsch.

- ☞ Ist der Satz im Rechteck wahr oder falsch?

Russells Paradoxie

Sei $\overline{M}$ die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht zum Element haben:

$$\overline{M} := \{M : M \notin M\}$$

☞ Ist $\overline{M} \in \overline{M}$?

Das Postkarten-Paradoxon

(Vorderseite) Der Satz auf der anderen Seite ist wahr.	(Rückseite) Der Satz auf der anderen Seite ist falsch.
--	--

- ☞ Sind die Sätze auf der Postkarte wahr oder falsch?

Poppers Postkarte

„Lieber M[artin] G[ardner],
Bitte senden Sie mir diese Karte wieder zurück, tragen Sie aber
vorher ‚ja‘ oder irgendein beliebiges Zeichen in das leere Rechteck
links von meiner Unterschrift ein, wenn Sie Grund zu der Annahme
haben, daß ich bei Erhalt der Karte dieses Rechteck noch leer
vorfinden werde.



Ihr ergebener
K. R. Popper“

Karl Raimund Popper, *A Comment on the New Prediction Paradox*, in:
British Journal for the Philosophy of Science 13 (1963), S. 51, zit. n.
Paul Watzlawick, *Wie wirklich ist die Wirklichkeit? Wahn, Täuschung,
Verstehen*, München: R. Piper & Co., 9. Aufl. 1982, S. 26.

Grellings Paradoxie

Ein Wort ist *autologisch* gdw. es die Eigenschaft, die es bezeichnet, hat.

Ein Wort ist *heterologisch* gdw. es die Eigenschaft, die es bezeichnet, nicht hat.

Autologisch sind z.B. die Wörter ‚kurz‘, ‚dreisilbig‘ ...

Heterologisch sind z.B. die Wörter ‚lang‘, ‚fünfsilbig‘ ...

☞ Ist das Wort ‚heterologisch‘ autologisch oder heterologisch?

Inhalt

- 1 Cantor
- 2 Diagonalparadoxa
- 3 Tentative Lösungen

Das Thomson-Theorem

„Let S be any set and R any relation defined at least on S . Then no element of S has R to all and only those S -elements which do not have R to themselves“.

$$\neg \exists y \forall x (R(y, x) \leftrightarrow \neg R(x, x))$$

Vgl. James F. Thomson: *On Some Paradoxes*, in: *Analytical Philosophy. First Series*, hg. von R. J. Butler, Oxford 1962, Nachdr. 1966, S. 104–119.

Auswege

Aufstieg auf die Metaebene erzeugt eine unendliche Hierarchie

- Lügner und Postkarte (Alfred Tarski)
- Russell-Paradoxie (Bertrand Russell, Typentheorie)
- Grellings Paradoxie
- Gödel (der gangbare Weg)

— oder es entsteht ein Widerspruch

- der Barbier (als *reductio ad absurdum*)
- Grellings Paradoxie
- *Double-Bind*-Situationen (Gregory Bateson u.a.)

☞ die „polarity thesis“ (Dale Jacquette)

Literatur

Cantor, Georg: *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, in: ders., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts mit Erläuterungen und Anmerkungen* [...], hg. von E. Zermelo, Berlin 1932, S. 278–281.

Jacquette, Dale: *Diagonalization in Logic and Mathematics*, in: *Handbook of Philosophical Logic. 2nd Edition*, Bd. 11, hg. von D. M. Gabbay u. F. Guenther, Dordrecht u.a. 2004, S. 55–147.

Thomson, James F.: *On Some Paradoxes*, in: *Analytical Philosophy. First Series*, hg. von R. J. Butler, Oxford 1962, Nachdr. 1966, S. 104–119.