

Grenzen der Beweisbarkeit

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Abschluss

Michael Matzer

Version vom 27.06.2022, 13:35

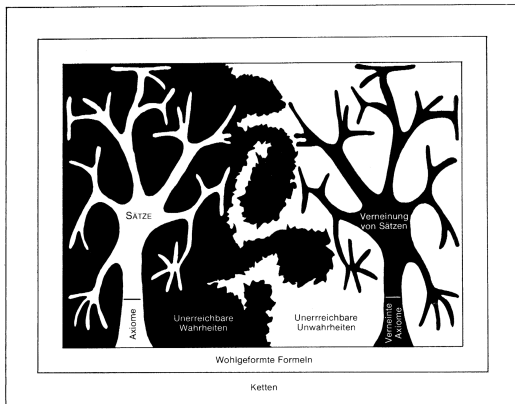
Inhalt

- 1 Bilder der Lage
- 2 Reduktionen
- 3 Gödel-Interpretationen

Inhalt

- 1 Bilder der Lage
- 2 Reduktionen
- 3 Gödel-Interpretationen

Hofstadter, G. E. B.



Hofstadter, Douglas R.: *Gödel, Escher, Bach. Ein Endloses Geflochtenes Band*, München: dtv, 12. Aufl. 2008, Abb. 18, S. 76.

Meine Zeichnung



Inhalt

- 1 Bilder der Lage
- 2 Reduktionen
- 3 Gödel-Interpretationen

Reduktionen

Reduktion eines Problems mit bislang unbekannter Lösung auf
eines mit bekannter Lösung

Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz (Satz XI, S. 192)

In der Arithmetik ist beweisbar:

Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, dann ist der Gödelsatz beweisbar.

⇒ Daher ist die Aussage, dass die Arithmetik widerspruchsfrei ist, in der Arithmetik nicht beweisbar.

☞ Zweiter Dolchstoß für das Hilbert-Programm.

Die Goldbachsche Vermutung

Jede gerade Zahl ≥ 4 ist als Summe genau zweier Primzahlen darstellbar.

Die Goldbachsche Vermutung (Beispiele)

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$

$$12 = 5 + 7$$

$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$

$$16 = 3 + 13 = 5 + 11$$

$$18 = 5 + 13 = 7 + 11$$

$$20 = 3 + 17 = 7 + 13$$

$$22 = 3 + 19 = 5 + 17 = \dots$$

$$24 = 5 + 19 = 7 + 17 = \dots$$

$$26 = 3 + 23 = 7 + 19 = \dots$$

$$28 = 5 + 23 = 11 + 17$$

$$30 = 7 + 23 = 11 + 19 = \dots$$

$$32 = 3 + 29 = 13 + 19$$

$$34 = 3 + 31 = 5 + 29 = \dots$$

$$36 = 5 + 31 = 7 + 29 = \dots$$

$$38 = 7 + 31 = 19 + 19$$

$$40 = 3 + 37 = 11 + 29 = \dots$$

$$42 = 5 + 37 = 11 + 31 = \dots$$

Die Collatz-Vermutung

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3 \cdot n + 1 & \text{sonst, d.h. falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Jede natürliche Zahl ist durch wiederholte („iterierte“) Anwendung der Funktion f auf 1 reduzierbar.

Inhalt

- 1 Bilder der Lage
- 2 Reduktionen
- 3 Gödel-Interpretationen

Die Tagespost: *Grenzen unserer Erkenntnis.* *Lügner-Paradoxon*

„Die Leistung Kurt Gödels bestand darin, das Lügner-Paradoxon in die Sprache der formalen Logik zu übersetzen. Er konstruierte eine logische Formel G, die behauptet, dass sie selbst nicht beweisbar ist (genauer: G ist logisch äquivalent zu der Aussage, dass G nicht beweisbar ist). Die Frage, ob G wahr ist, führt zu einem analogen Widerspruch wie bei Epimenides: Ist nämlich G beweisbar, ist sie nicht wahr und demnach nicht beweisbar (zumindest in einem korrekten Beweissystem); in diesem Fall ist G aber wahr und, falls in dem zugrundeliegenden Beweissystem alle wahren Aussagen bewiesen werden können, beweisbar.“

online verfügbar unter <https://www.die-tagespost.de/leben/glaube/grenzen-unserer-erkenntnis-art-219462>, Zugriff am 3.3.2022

Ö1: Kurt Gödel. Jahrhundertmathematiker und großer Entdecker, 8.4.2017

„[...] Die mathematisch-logischen Beweise Gödels haben unangenehme Folgen für uns alle, wenn wir glauben, dass logisches Denken das Abbild unserer Vernunft ist und wir uns im Leben auf unser vernünftiges Denken verlassen wollen.

Sehr frei nach Gödel könnte man sagen, dass die Vernunft Gedanken und Sätze produziert, die innerhalb der Vernunft unbeweisbar, widersprüchlich und dennoch wahr sein können. Die Vernunft erstrahlt so im schönen Schein der Paradoxien. Zu Recht mein [sic] Goldstein, dass Kurt Gödel der Welt des Paradoxen und des schönen Scheins im Wien der 1920er Jahre real begegnet wäre.“

online verfügbar unter <https://oe1.orf.at/artikel/204452/Kurt-Goedel>, Zugriff am 3.3.2022

Leonard A. Malik über Gödel, *Mount Misery*

„Deswegen ist es ja Quatsch — gerade weil es paßt. Der Mensch ist derart komplex, daß jede Theorie paßt. Aber dadurch, daß man einer bestimmten Theorie folgt, schließt man die Komplexität aus und vergißt die ‚menschliche‘ Seite. Passende Theorien schließen andere Theorien aus, also passen sie doch nicht. So wie Religionen, die andere Religionen ausschließen, zum Krieg führen, auch wenn sie den Frieden predigen. Was paßt, kann niemals passen. Und am schlimmsten sind Theorien, die ‚perfekt‘ passen.“

„Das ist doch verrückt.“

„Nee, das ist Gödel. Kurt Gödel, Gödels Satz.

Paradigma-Verschiebung, 1931.“

Samuel Shem: *Mount Misery*, übers. v. R. Hermstein u. Ch. Spiel,
[TB-Ausg.] München: Droemersch Verlagsanstalt Th. Knaur
Nachf. 2000, S. 360.

Hört man manchmal

„Die Arithmetik ist wesentlich unvollständig.“

☞ Das ist der Erläuterung bedürftig. (Erinnern Sie sich?)

„Die Arithmetik ist unvollständig.“

Fast zu Ende

„I don't care to belong to any club that will have me as a member.“
(Groucho Marx)

„Ein sonderbares Phänomen von Kants Schwäche war folgendes.
Gewöhnlich schreibt man sich auf, was man nicht vergessen will,
aber Kant schrieb in sein Büchelchen: Der Name Lampe muß nun
völlig vergessen werden.“
(Ehregott Andreas Christoph Wasianski)

Ende

- ✎ Abschlusskolloquien in der „Prüfungswoche“.

Ich wünsche Ihnen ganz viel Erfolg bei Ihren Prüfungen, sei es das Abschlusskolloquium zu unserem Kurs, oder seien es andere — sowie einen schönen Sommer im Anschluss!