

# Grenzen der Beweisbarkeit

## Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

### ÜBUNGSEINHEIT 1

**I.** Für diese Aufgabe betrachten Sie bitte das formale System:

- Vokabular:  $\{X, O\}$
- Axiomenmenge:  $\{XO\}$
- Ableitungsregeln:
  - (K) Das erste Zeichen einer Zeichenreihe der Länge  $\geq 2$  darf weggelassen werden.
  - (D) Eine Zeichenreihe darf „verdoppelt“ werden.

1. Bitte leiten Sie das Theorem ‚XOXO‘ ab.
2. Bitte leiten Sie das Theorem ‚OOO‘ ab.
3. Ist ‚XX‘ ein Theorem? Wenn ja, dann leiten Sie es bitte ab. Wenn nein, warum nicht?

**II.** Bitte bestimmen Sie jeweils den größten Exponenten der Primzahl 5 in der Zerlegung folgender Zahlen:

1.  $195775322592465000 = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^9 \cdot 11^3$
2.  $190512000 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$
3.  $606436875 = 3^6 \cdot 5^4 \cdot 11^3$
4. (\*)  $2329687899 = 3^6 \cdot 7^4 \cdot 11^3$
5. (\*) 2

(Die mit einem Stern gekennzeichneten Aufgaben sind etwas schwieriger, aber sie haben auch jeweils eine Lösung.)

**III.** Bitte bestimmen von den folgenden Ausdrücken, ob sie eine arithmetische Funktion bedeuten und ein Zahl zum Ergebnis haben, oder ob sie ein Prädikat bedeuten und (zunächst) einen Wahrheitswert zum Ergebnis haben. (Sie finden alle Ausdrücke in den Folien und auf Ihrem entsprechenden Handout. / Lassen Sie den Umstand, dass wir statt Prädikaten genau genommen deren charakteristische Funktionen verwenden, deren Werte Zahlen sind, denn sonst funktioniert die hier gefragte Unterscheidung nicht.)

1.  $x/y$ :  $x$  ist teilbar durch  $y$ . (Gödel Nr. 1)
2.  $\text{Prim}(x)$ :  $x$  ist Primzahl. (Gödel Nr. 2)
3.  $\text{Pr}(n)$  ist die  $n$ -te Primzahl (der Größe nach). (Gödel Nr. 5)
4.  $n\text{Gl } x$  ist das  $n$ -te Glied der der Zahl  $x$  zugeordneten Zahlenreihe (für  $n > 0$  und nicht größer als die Länge dieser Reihe). (Gödel Nr. 6)
5.  $l(x)$  ist die Länge der  $x$  zugeordneten Zahlenreihe. (Gödel Nr. 7)
6.  $Z(n)$ : das ZAHLZEICHEN für die Zahl  $n$ . (Gödel Nr. 17)
7.  $\text{Neg}(x)$  ist die NEGATION von  $x$ . (Vgl. Gödel Nr. 13)

8.  $x \text{ Imp } y$  ist die IMPLIKATIONSFORMEL mit dem VORDERGLIED  $x$  und dem NACHGLIED  $y$ . (Vgl. Gödel Nr. 14, 32)
9.  $\text{Form}(x)$ :  $x$  ist FORMEL (d.h. letztes Glied einer FORMELREIHE [...]). (Vgl. Gödel Nr. 23, beachte Fn. 35, S. 166)
10.  $v \text{ Fr } x$ :  $v$  kommt in  $x$  als FREIE VARIABLE vor. (Gödel Nr. 26)
11.  $Sb(x, y, v)$ , das ERGEBNIS DER SUBSTITUTION von  $y$  für  $v$  in  $x$ . (Gödel Nr. 31)
12.  $Fl(x, y, z)$ :  $x$  ist UNMITTELBARE FOLGE aus  $y$  und  $z$ . (Vgl. Gödel Nr.43)
13.  $x B y$ :  $x$  ist ein BEWEIS für die FORMEL  $y$ . (Gödel Nr. 45)
14.  $\text{Bew}(x)$ :  $x$  ist eine BEWEISBARE FORMEL. (Gödel Nr. 46)

**IV.** Bitte bestimmen Sie für folgende, gegebene natürliche Zahlen  $x$ , die Sie als Reihen auffassen sollen, jeweils 2  $Gl x$ , also das zweite Glied der jeweiligen Reihe. (Überlegen Sie: der Exponent der wievielten Primzahl ist das?)

1.  $648000 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3$
2.  $305366902063503291765010372500000000 = 2^8 \cdot 3^9 \cdot 5^{10} \cdot 7^{11} \cdot 11^{12}$
3.  $72 = 2^3 \cdot 3^2$
4.  $190512000 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$
5.  $60060 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1$

**V.** Bitte bestimmen Sie für die unter IV gegebene Reihen  $x$  das jeweilige  $l(x)$ , d.i. deren jeweilige Länge.

**VI.** Bitte bestimmen Sie für die unter IV gegebene Reihen  $x$  das jeweilige  $l(x) Gl x$ . (Überlegen Sie: Was hat Ihnen in der voraufgehenden Aufgabe die Funktion  $l(x)$  geliefert? Welches Glied der jeweiligen Reihe ist also das gefragte?)

**VII.** Bei einem Auftritt in Japan im Jahre 1972 richtet der Gitarrist der Band *Deep Purple*, Ritchie Blackmore, bezüglich seines Bühnenmonitors an den Tontechniker folgende Frage:

„Can I have everything louder than everything else?“

(Lesen Sie die ganze Anekdote auf <https://darkerthanblue.wordpress.com/another-service-from-darker-than-blue-magazine/recording-made-in-japan/>. Die Frage ist auf dem Live-Album *Made in Japan* der Band deutlich zu hören, am Ende des Songs *Smoke on the Water*.)

Bitte beantworten Sie (kurz und essayistisch) folgende Fragen:

- Kann der Tontechniker der Aufforderung, die hinter der Frage von Blackmore steckt, nachkommen?
- Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?
- Ist der Inhalt der Frage paradox, wie etwa der Lügner oder das Barbier-Paradoxon? Oder schrammt er, wie der Gödelsatz, (knapp oder gar nicht so knapp) an der Paradoxie vorbei?

(Sie müssen sich nicht ausschließlich auf diese Fragen beschränken, wenn Sie mehr schreiben wollen.)